I PROBLEMI DEL RALLY MATEMATICO TRANSALPINO, *UNA RISORSA PER LA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI*

Bernard Anselmo[1], Michel Henry[2]

Sunto

Da circa vent'anni il Rally matematico Transalpino si rivolge agli allievi dagli 8 ai 15 anni, di diversi paesi. Propone loro di risolvere, per classi, dei problemi "atipici" senza l'aiuto dell'insegnante. Gli enunciati prodotti, le produzioni degli allievi raccolte, le analisi dei risultati, ma anche le relazioni di sperimentazioni costituiscono una base di dati importante, sia dal punto di vista quantitativo, sia da quello qualitativo, disponibile per la ricerca e la formazione degli insegnanti. Questa base di dati è stata presentata all'incontro della COPIRELEM (Commissione permanente degli IREM sull'insegnamento elementare) che si è tenuto a Besançon dal 16 al 18 giugno 2015, sotto forma di atelier di tre ore, per mostrare come utilizzare un problema del RMT per la formazione degli insegnanti.

I problemi del RMT: una risorsa per la classe, la ricerca e la formazione

I problemi del RMT presentano le specificità seguenti:

- Per ogni problema, dopo **un'ampia consultazione fra i vari animatori (insegnanti e ricercatori),** viene redatta un'analisi a priori che descrive i contenuti matematici del problema, descrive il compito dell'allievo e indica i criteri comuni atti all'attribuzione dei punteggi relativi agli elaborati.
- La loro risoluzione ricade sotto la completa responsabilità della classe la quale, in **assenza dell'insegnante abituale, deve consegnare un solo elaborato per problema con le soluzioni e le spiegazioni, in condizioni di regole determinate (da 5 a 7 problemi per la classe in 50 minuti)**.
- Dopo lo svolgimento di ciascuna prova, una sintesi dei primi risultati dà per ciascun problema una "media" di punteggi per categoria, sull'insieme delle classi di tutte le sezioni, oltre alla ripartizione di tali punteggi da 0 a 4 secondo i criteri definiti dall'analisi a priori. Questa sintesi è realizzata sulla base del **migliaio di classi di vari paesi e fornisce** un'indicazione preziosa sulla "riuscita" del problema, dalla "incomprensione" (0 punti) fino alla risposta corretta con spiegazione completa (4 punti).

  Essa permette anche, nel confronto delle medie ottenute su uno stesso problema proposto a classi di livelli scolastici differenti, di vedere **l'evoluzione di tale riuscita in funzione dell'età degli allievi.**
- **Per numerosi** problemi sono condotte analisi a posteriori da gruppi di lavoro composti da insegnanti, formatori, ricercatori di diversi paesi o regioni a partire dagli elaborati delle classi delle diverse sezioni. Tali analisi permettono di identificare le procedure adottate dagli allievi all'atto della loro risoluzione, le difficoltà, gli ostacoli, gli errori ricorrenti, il livello di costruzione dei concetti matematici, e sono utili alla **ricerca e alla formazione.** Forniscono anche **numerose idee** di utilizzazione didattica dei problemi a quegli insegnanti che desiderano inserirli nel percorso didattico della propria classe.

I UTILIZZARE UN PROBLEMA DEL RMT PER LA FORMAZIONE

I partecipanti all'atelier sono stati impegnati nella parte iniziale di un dispositivo di formazione destinato agli insegnanti del ciclo 3 (categorie 4, 5, 6) a partire da un problema RMT. Tale dispositivo potrebbe essere ripreso con altri problemi della banca dell'ARMT.

1. Il dispositivo di formazione

1.1. Gli obiettivi

Obiettivi di tale formazione non sono solo quelli legati alle nozioni insite nel problema scelto, ma anche quelli di tipo didattico legati alla concezione e all'attuazione di un insegnamento tramite la risoluzione di problemi. Questi obiettivi sono proposti ai partecipanti nella forma seguente:

- Condurre un'analisi *a priori* di un problema per poter poi osservare meglio gli allievi al lavoro;
- Condurre un'analisi *a posteriori* basandosi sulle produzioni degli allievi.

1.2. Lo svolgimento previsto

La formazione prevista di 3 ore, è organizzata in 4 periodi seguiti, ciascuno, da uno scambio tra i partecipanti e eventuali apporti da parte dei formatori.

1 Risoluzione del problema da parte dei partecipanti.

[1] ESPÉ Lyon 1, IREM de Lyon, ARMT bernard.anselmo@univ-lyon1.fr

[2] IREM de Franche-Comté, ARMT, michel.henry@univ-fcomte.fr

Lavoro individuale o a gruppi di due: si richiede di identificare le conoscenze matematiche messe in gioco.

2. Analisi *a priori*

Tale analisi è preparata dai partecipanti, riuniti in gruppi di 4, sulla base di alcune domande:

- Quali sono le procedure di risoluzione corrette o errate, che possono proporre gli allievi per risolvere questo problema?
- Quali sono le difficoltà che gli allievi potrebbero incontrare?
- Quali sono gli errori possibili?
- Quali sono le fonti possibili di tali errori?

3. Analisi degli elaborati degli allievi

Ciascun gruppo riceve alcuni elaborati di allievi (una quindicina) ed effettua una classificazione in vista di una successiva messa in comune in classe. I criteri per la classificazione sono lasciati alle scelte dei partecipanti che ne discutono nel loro gruppo rispettivo. Dovranno essere precisati gli obiettivi della messa in comune in classe.

4. Bilancio

Si tratta di lavorare su diverse messe in comune possibili, evidenziando i loro diversi elementi di sintesi (statuto dei disegni e delle figure in un problema di geometria a diversi livelli, uso degli strumenti, appello a conoscenze pregresse, istituzionalizzazioni possibili, …) e le modalità secondo le quali potrebbero essere condotte.

1.4. L'analisi del dispositivo

Questo dispositivo può essere analizzato nell'ambito di un modello[3] strutturato in 5 livelli che caratterizzano le attività di formazione secondo la loro natura, la posizione del formando e le conoscenze in gioco.

In questa struttura, il tempo 1 della formazione si situerebbe dapprima al livello 0, quello dell'attività matematica nella quale i partecipanti, che si trovano nella posizione di allievi, hanno un problema da risolvere, poi al livello 1, quello dell'analisi "riflessiva" dell'attività dove, in quanto insegnanti, hanno degli scambi sulle conoscenze matematiche messe in gioco.

I tempi 2 e 3 dove i partecipanti assumono la statuto di insegnanti per anticipare l'attività degli allievi, analizzare gli elaborati e prendere in considerazione il loro uso in classe potrebbero situarsi al livello 2, quello dell'analisi didattica e pedagogica. Il tempo 4, quello del bilancio, nel quale i partecipanti discutono le loro pratiche in classe, confrontando le loro proposte, potrebbe essere inserito al livello 3 del modello, quello dell'analisi riflessiva dell'attività didattica e pedagogica.

In tal modo il dispositivo di formazione appare ancora più ricco laddove si immagini in che maniera si potrebbe estenderlo fino al livello 5 del modello, nel quale i partecipanti prenderebbero l'attitudine del ricercatore per approfondire, in seguito, una problematica originata nell'ambito della formazione. Noi vi vediamo un prolungamento possibile per ricerche sull'uso del RMT come mezzo di formazione.

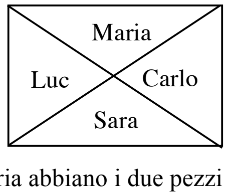
2. La torta di Nonna Lucia

Il problema sul quale hanno lavorato i partecipanti all'atelier è un problema relativo alla seconda prova del 22° RMT, proposto nel 2014 a classi delle categorie 4, 5 e 6.

LA TORTA DI NONNA LUCIA

Nonna Lucia ha preparato una torta rettangolare al cioccolato per la merenda dei suoi nipoti Luca, Carlo, Sara e Maria.

Per darne una fetta ciascuno la divide in questo modo:



Luca e Carlo non sono contenti perché pensano che Sara e Maria abbiano i due pezzi più grandi.
Sara e Maria sostengono invece che ognuno ha ricevuto la stessa quantità di torta.

Chi ha ragione?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

[3] Gli animatori dell'atelier hanno concepito il loro dispositivo in tempi differenti in relazione ai cinque livelli del modello di formazione, descritto qui, da loro adottato.

2.1. Risoluzione da parte dei partecipanti

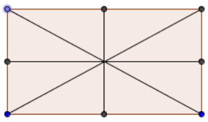
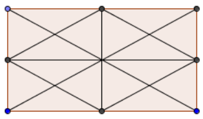
Il problema è stato risolto da alcuni utilizzando le proprietà degli assi di simmetria del rettangolo che lo divide in 4 rettangoli sovrapponibili, poi quella delle diagonali del rettangolo che dividono i rettangoli ottenuti in due triangoli aventi la medesima area. Altri hanno fatto appello alla proprietà delle mediane di un triangolo che lo dividono in due triangoli aventi la medesima area.

Hanno identificato in questo problema le conoscenze soggiacenti legate alla nozione di area e alle proprietà geometriche del rettangolo. Hanno osservato che tali proprietà sarebbero mobilizzate in modo implicito dagli allievi e talvolta utilizzate in modo più esplicito, per esempio nel calcolo dell'area. Va sottolineato che in questo momento dell'atelier, la questione della generalità della prova non è stata sollevata.

2.2. Analisi a priori

I partecipanti all'atelier hanno anticipato un certo numero di procedure corrette o errate che gli allievi potrebbero utilizzare:

- Interpretazione unicamente visiva:
  - I triangoli di Maria e Sara hanno una base più grande, dunque la loro area è più grande
  - I triangoli di Luca e Carlo sono più grandi perché sono più alti.
- Misura e formula dell'area del triangolo; errori nelle misure o nel calcolo o di approssimazione.
- Ritaglio/conteggio: disegno di una pavimentazione del rettangolo in otto o in sedici pezzi e confronto delle parti della torta per conteggio delle diverse parti che compongono ogni suddivisione.

- Ritaglio/sovrapposizione: ritaglio con o senza l'uso di carta da ricalco, riproduzione del triangolo di Luca, poi ritaglio del triangolo di Maria.
- Utilizzazione di una quadrettatura e poi conteggio del numero di quadratini.
- Interpretazione del vocabolario dell'enunciato: "abbiamo diviso in 4 dunque ¼ ciascuno".

I partecipanti all'atelier hanno classificato le difficoltà legate alla comprensione della nozione di suddivisione (equa o no), a quella della nozione d'area (limitandosi a un confronto di superfici per sovrapposizione), a quelle legate alla precisione (del ritaglio, della quadrettatura, delle misure, …). Tutto ciò li ha portati alla questione della scelta delle variabili didattiche che determinano in parte i comportamenti degli allievi e i loro apprendimenti. In particolare, la dimensione del rettangolo che rappresenta la torta, un rettangolo esplicitamente in scala o no… permette o non permette) che gli allievi scelgano di lavorare sul disegno con i loro strumenti di misura e aggirino l'ostacolo di una risposta più teorica.

Si può osservare che a questo stadio i partecipanti non hanno citato esplicitamente fra le difficoltà quella che consiste nell'identificare la grandezza in gioco in questo problema quando si parla di quantità di torta.

2.3. Analisi degli elaborati

I partecipanti all'atelier, in gruppi di 4, hanno ricevuto una ventina di elaborati di allievi di categoria 6 della sezione della Franche-Comté (si veda allegato 1, nella versione in francese). E' stato loro richiesto di classificarli in vista di una successiva messa in comune.

I criteri della classificazione non sono stati i medesimi da parte dei vari gruppi. Se alcuni si sono interessati in particolare alle procedure seguite dagli allievi, altri hanno preso in considerazione le giustificazioni apportate o la natura delle argomentazioni date per rispondere al problema.

Un altro criterio di classificazione possibile ha avuto origine dall'analisi a posteriori compiuta su 208 elaborati dalla sezione della Franche-Comté (si veda l'allegato 2): cioè, il livello di maturità geometrica che accompagna il passaggio da una geometria "di percezione" ad una geometria strumentale e quello del salto epistemologico dal disegno alla figura.

E questo porta a considerare una classificazione in due categorie:

A - lavoro sul disegno geometrico, ritagli, piegature, colorazione, misure di lunghezze e di angoli, calcolo di perimetri e aree.

B - lavoro sulla figura come oggetto astratto rappresentato dal disegno: riferimento esplicito o implicito ad una proprietà geometrica del rettangolo, ragionamento generalizzabile a tutti i rettangoli, confronto di aree tramite l'applicazione della formula generale, calcolo letterale.

E' pertanto possibile proporre una griglia di classificazione (esempi corrispondenti di elaborati si trovano nell'allegato 1, version in francese):

A0 - Incomprensione del problema, affermazione semplice, per esempio: le parti sono uguali perché ciascuno ha ricevuto ¼ della torta (elaborato 6FC6032).

A1 - Ritaglio del disegno dato, ricomposizione stile puzzle e sovrapposizione degli assemblaggi per fare confronti (elaborati 6FC6045 e 6FC6178).

A2 - Disegni sul disegno dato, per esempio delle mediane, e constatazione visiva (uguaglianza dei triangoli rettangoli, colorazione, elaborati 6FC6086 e 6FC6180) oppure altre spiegazioni (utilizzazione di una quadrettatura, elaborato 6FC6008).

A3 - Misure approssimative di lunghezze sul disegno dato e calcolo approssimato.

A3a - Misure dei perimetri e risposta: «le parti non sono uguali» (elaborati 6FC6088, 6FC6016, 6FC6144 e 6FC6103).

A3b - Misure delle aree con la formula dell'area del triangolo (elaborati 6FC6092, risposta: «le parti sono uguali» e 6FC6010 e 6FC6147, risposte: «le parti sono diverse»).

A3c - Misure degli angoli al vertice dei triangoli isosceli (elaborato 6FC6014, risposta: «le parti sono diverse»).

B1 - Ragionamento senza riproduzione del disegno: le basi sono diverse, dunque i perimetri sono diversi, risposta: «le parti sono diverse» (elaborato 6FC6085).

B2 Costruzioni su figure geometriche

B2a - Disegno di un rettangolo qualunque e disegno delle mediane (uguaglianza dei rettangoli, elaborato 6FC6091, risposta: «le parti sono uguali») oppure disegno di una quadrettatura (elaborato 6FC6029, risposta: « le parti sono diverse»).

B2b - Disegno delle mediane: i triangoli rettangoli sono uguali, ciascuno ha dunque ricevuto i 2/8 della torta (elaborato 6FC6083).

B3 - Calcolo letterale delle aree senza le misure: il rettangolo ha per lati L e l e la parte delle femmine ha come area $L\times l/2$ e quella dei maschi $l\times L/2$, da cui «le parti sono uguali» (elaborati 6FC6193 e 6FC6159).

II DISCUSSIONE E SVILUPPI[4]

Le differenze scaturite a partire dai criteri di classificazione hanno portato i partecipanti a riprendere in considerazione la scelta delle variabili didattiche effettuata nella presentazione del problema: quella di proporre la figura su un foglio bianco oppure su un foglio a quadretti, o ancora di non dare la figura, ma anche la scelta di proporre un enunciato contestualizzato (divisione di una torta) piuttosto che un enunciato "matematico", del tipo "ecco un rettangolo diviso in 4 parti; hanno la medesima area?", che limita le ambiguità. Su quest'ultimo punto è stata evocata l'importanza della modellizzazione nell'attività matematica per argomentare in favore di una presentazione contestualizzata.

E' stata anche sottolineata la difficoltà a selezionare degli elaborati in vista di una messa in comune in classe. La ricchezza del problema permette diverse piste di utilizzazione didattica che, come appare da un'analisi, l'insegnante non può gestire da solo in una classe ordinaria. In tal senso, le piste indicate nella banca di problemi dell'ARMT (si veda la sitografia) possono costituire un utile aiuto.

Su un tema così essenziale quale quello della determinazione dell'area di un triangolo, il problema della torta di Nonna Lucia offre molteplici possibilità di utilizzazione:

- il confronto fra una procedura per pavimentazione o con la ricerca di unità di misura "non convenzionali" e la procedura tramite il calcolo di un prodotto di misure,
- il legame tra l'area di un rettangolo e quella dei due triangoli rettangoli che lo compongono,
- il conflitto area-perimetro,
- l'imprecisione delle misure di lunghezza prese con il righello e il suo effetto sul calcolo delle aree,
- l'approccio al ragionamento deduttivo a proposito della suddivisione di un rettangolo con le sue diagonali e mediane, delle misure delle lunghezze e delle aree degli otto triangoli rettangoli.

Anche nell'ambito della formazione l'analisi incrociata degli elaborati degli allievi sul problema de "La torta di Nonna Lucia" può portare ad alcune considerazioni:

[4] In questo paragrafo ci limitiamo a riportare le questioni che si sono poste i partecipanti all'atelier, senza mettere in questione il dispositivo stesso di formazione. Questo sviluppo, che presuppone l'organizzazione di una raccolta sistematica di tutti gli interventi, potrebbe interessare le ricerche sulla formazione degli insegnanti.

- di ordine generale sulle situazioni di ricerca:
  - la diversità delle procedure utilizzate dagli allievi;
  - l'inventiva degli allievi;
  - la loro difficoltà a spiegare per iscritto le loro procedure…
- sull'insegnamento delle grandezze:
  - la confusione tra area e perimetro;
  - il fatto che gli allievi utilizzano in maggioranza la misura;
  - la constatazione che l'insegnamento delle grandezze va forse troppo presto verso la misura, senza prendere il tempo sufficiente affinché si installi il concetto...
  - la necessità di un passaggio attraverso manipolazioni, pavimentazioni e conservazione-confronto di lunghezze, angoli e aree, prima dell'introduzione delle misure.
- sull'insegnamento della geometria:
  - il passaggio da una geometria percettiva del disegno ad una geometria del disegno geometrico, dove la riga e il compasso sono portatori di proprietà geometriche, poi il passaggio dalla geometria del disegno alla geometria delle figure tramite il riconoscimento di proprietà comuni, e infine, l'utilizzazione degli elementi di deduzione e di prova.

Una presentazione su Internet della banca di problemi (si veda sitografia) ha fatto seguito a questi scambi. Tale presentazione ha mostrato come il dispositivo di formazione possa essere ampliato con altri problemi dello stesso tipo che è possibile identificare rapidamente e diventare l'oggetto di una sperimentazione in classe. Ha mostrato anche come, a partire da introduzioni differenti, dispositivi di formazione analoghi possono essere elaborati nell'ambito di altre tematiche.

III CONCLUSIONE

L'atelier ha permesso di presentare un dispositivo di formazione degli insegnanti costruito con riferimento ad un problema del RMT e di mostrarne le potenzialità.

Anche altri dispositivi utilizzano problemi del RMT: nella formazione iniziale, tali dispositivi consistono ad esempio nel discutere le concezioni degli studenti nel loro rapporto con la matematica attraverso i problemi del rally. Nel caso della formazione continua, i problemi del rally possono portare gli insegnanti a riflettere sull'apprendimento tramite la risoluzione di problemi o il lavoro degli allievi in collaborazione.

Da tempo i formatori sanno che possono trovare preziosi suggerimenti nei rally matematici. Oggi dispongono di un valido mezzo per accedervi: la banca di problemi del RMT.

BIBLIOGRAFIA

ANSELMO B., HENRY M., (1995) Les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin, une ressource pour la formation des enseignants ? in *Actes du XXXXII^e^ colloque COPIRELEM*, IREM de Franche-Comté.

CHARNAY R. (2006) Potentialités et limites des problèmes du RMT, 15-24, in *Actes des journées d'études sur le rallye mathématique volume 6.* Éditeurs : GRUGNETTI L., JAQUET F., MEDICI D, RINALDI G.

DANOS A., MASSELOT P., SIMARD A., WINDERC. (1994) Analyser une ressource de formation : « exemple de la situation des annuaires » in *Actes du XXXXI^e^ colloque COPIRELEM*, IREM d'Aquitaine.

HOUDEMENT C. (2003) Autour des stratégies de formation des maitres du premier degré 23-32, in *Carnets de route de la COPIRELEM*, *Concertum Dix en de formation des professeurs des écoles en mathématiques.* Paris : ARPME

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maitres du premier degré en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 16/3, 289-322, Grenoble : La pensée sauvage.

JAQUET F. (2014) *A propos de triangles.* In Math-École 222 pp. 69-75

LE BORGNE P. (2003) Des rallyes pour faire des mathématiques autrement, 419-448, in *Actes du XXX^e^ colloque COPIRELEM*, IREM de Marseille.

SITOGRAFIA

Association Rallye Mathématique Transalpin : http://www.armtint.org/
Banque de problèmes du RMT : http://www.projet-ermitage.org/ARMT/bd-armt.html
Étude du problème *La tarte de Mamie Lucie* :
http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=gp94-fr&flag=1&langue=fr&w=0
Association RMT section de l'Ain : http://arma01.fr/rallye/
Le RMT en Franche-Comté : http://www.apmep.fr/-Rallye-Mathematique-Transalpin-RMT

ALLEGATO 1 (elaborati degli allievi, ≈)

ALLEGATO 2 (Analisi degli elaborati di categoria 6 della Franche-Comté)

Classificazione dei 201 elaborati secondo la griglia in due categorie A e B.

	Incom-prensione	Lavoro sul disegno					Ragionamenti sulla figura			
	A0 4 parti uguali	A1 Percet-tivo	A2 Tracce	A3a Peri-metri	A3b Aree	A3c Angoli	B1 Basi e perimetri	B2a Uguaglianza dei rettangoli	B2b Divisione in triangoli	B3 Calcoli di aree
Totale	56	28	33	33	43	3	2	5	3	2
%	27%	14%	16%	16%	21%	1%	1%	2,5%	1,5%	1%
% ragruppati	27%	67%					6%			

Attribuzione dei punteggi, da 0 a 4 su 201 elaborati, media in Franche-Comté: 1,35

Punteggi	0	1	2	3	4
Numero di elaborati	123	1	11	15	51
in percentuale	61%	0,5%	5,5%	7,5%	25,5%

Criteri:

4 Risposta corretta (Sara e Maria hanno ragione) con spiegazione chiara (ritaglio/piegatura o disegno di una trama e spiegazioni, o anche calcoli utilizzando la formula dell'area del triangolo)

3 Risposta corretta con ritaglio o disegno della trama, ma spiegazioni incomplete

2 Risposta corretta con ritaglio o disegno della trama, ma senza spiegazioni né calcoli

1 Ritaglio o disegno della trama, ma senza risposta
oppure solo l'affermazione che le parti di Sara e Maria sono uguali tra loro, così come le parti di Luca e Carlo senza spiegazione

0 Incomprensione del problema o risposta basata su considerazioni sul perimetro delle parti, avendo le parti delle femmine perimetro maggiore di quelle dei maschi

Per poter confrontare (si veda la banca di problemi dell'ARMT), ecco i punteggi su 2125 elaborati di 21 sezioni dell'ARMT. Sembra che questo problema porti all'errore la metà circa degli allievi, mentre un quarto risolve bene.

Punteggi attribuiti	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**N. classi**	**media**
Cat 4	272 (51%)	105 (20%)	22 (4%)	36 (7%)	97 (18%)	532	1.21
Cat 5	236 (42%)	87 (16%)	47 (8%)	54 (10%)	133 (24%)	557	1.57
Cat 6	450 (43%)	132 (13%)	96 (9%)	101 (10%)	257 (25%)	1036	1.6
Total	958 (45%)	324 (15%)	165 (8%)	191 (9%)	487 (23%)	2125	1.49

ALLEGATO 3 (dalla banca di problemi del RMT)

La torta di Nonna Lucia

Identificazione Rally: 22.II.06 ; categorie: 4, 5, 6 Ambiti: GP ; famiglie: ,

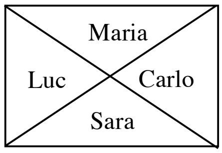
Sunto Mostrare che un rettangolo viene diviso dalle sue diagonali in quattro parti equivalenti

Enunciato

LA TORTA DI NONNA LUCIA

Nonna Lucia ha preparato una torta rettangolare al cioccolato per la merenda dei suoi nipoti Luca, Carlo, Sara e Maria.

Per darne una fetta ciascuno la divide in questo modo:



Luca e Carlo non sono contenti perché pensano che Sara e Maria abbiano i due pezzi più grandi.

Sara e Maria sostengono invece che ognuno ha ricevuto la stessa quantità di torta.

Chi ha ragione?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati

- Assicurarsi (eventualmente) che le fette delle due nipotine sono uguali fra loro, così come quelle dei due nipoti (per sovrapposizione, visiva o manipolativa, o per simmetria assiale o centrale, a seconda dei livelli).
- Confrontare poi una fetta di torta di una femmina con una fetta di un maschio, trovando una comune unità d'area.
- Senza ricorrere al calcolo delle aree, immaginare e/o disegnare una trama sulla figura tracciando le mediane del rettangolo, cosa che permette di vedere una "pavimentazione" della figura in 8 triangoli rettangoli, constatare che sono uguali e dedurre l'uguaglianza delle parti formate ciascuna da due di tali triangoli.
- Tramite misure prese sul disegno, fare riferimento alla formula dell'area di un triangolo e applicarla in modo opportuno.

L'utilizzazione della formula fa intervenire l'altezza del triangolo che qui non è tracciata (mentre in generale nei libri di testo lo è). Questo segmento divide una parte triangolare in due triangoli rettangoli (della pavimentazione precedente). Nell'osservare le relazioni (metà e doppio) tra i cateti di questi triangoli rettangoli, i lati del rettangolo (torta), le "basi" e "altezze" delle parti, si deduce che le misure necessarie al calcolo delle aree da confrontare sono le stesse. Senza questa constatazione, l'imprecisione delle misure può condurre ad aree differenti.

Prima di passare alle misure, bisogna convincersi del fatto che, se il perimetro si calcola con un'addizione delle misure dei lati, il calcolo dell'area richiede una moltiplicazione delle misure.

Bisogna anche rendersi conto che una semplice compensazione qualitativa (più lungo ma meno largo) non è sufficiente ad essere sicuri dell'equivalenza delle parti.

Parole-chiave

rettangolo, diagonale, triangolo, equivalenza, suddivisione, area, perimetro, misura

Risultati (22.II.06)

punteggi attribuiti su 2125 elaborati di 21 sezione:

Punteggi attribuiti	0	1	2	3	4	N. classi	m.
Cat 4	272 (51%)	105 (20%)	22 (4%)	36 (7%)	97 (18%)	532	1.21
Cat 5	236 (42%)	87 (16%)	47 (8%)	54 (10%)	133 (24%)	557	1.57
Cat 6	450 (43%)	132 (13%)	96 (9%)	101 (10%)	257 (25%)	1036	1.6
Total	958 (45%)	324 (15%)	165 (8%)	191 (9%)	487 (23%)	2125	1.49

Secondo i criteri dell'analisi a priori:

4 punti: Risposta corretta (Sara e Maria hanno ragione) con giustificazione chiara (ritaglio/piegatura o disegno di una trama e spiegazioni, o anche calcoli utilizzando la formula dell'area del triangolo)

3 punti: Risposta corretta con ritaglio o disegno della trama, ma spiegazioni incomplete

2 punti: Risposta corretta con ritaglio o disegno della trama, ma senza spiegazioni né calcoli

1 punto: Ritaglio o disegno della trama, ma senza risposta
oppure solo l'affermazione che le parti di Sara e Maria sono uguali tra loro, così come le parti di Luca e Carlo senza spiegazione

0 punto: Incomprensione del problema o risposta basata su considerazioni sul perimetro delle parti, avendo le parti delle femmine perimetro maggiore di quelle dei maschi

Procedure, ostacoli ed errori rilevati

(Su 124 elaborati della sezione SR)

- Qualche raro elaborato fa rifermento esplicitamente all'uguaglianza delle parti delle due femmine, così come quelle dei due maschi (per sovrapposizione, visiva o manipolativa, o per simmetria assiale o centrale, a seconda delle categorie. Nella gran parte dei casi, questa uguaglianza sembra essere ammessa implicitamente, mentre è quella tra le parti di una femmina e di un maschio al centro delle riflessioni.
- 38 elaborati su 124 (31%) mostrano le due mediane dei lati del rettangolo che lo "dividono" in otto triangoli rettangoli, cosa che permette un confronto diretto.
  Esempio: *Spiegazioni: Come potete vedere ho tagliati i pezzi in due* (sono disegnate le due mediane) *e questo fa dei triangoli rettangoli e ogni pezzo ha gli stessi triangoli rettangoli solo che non sono messi nello stesso modo allora ogni bambino ha la stessa quantità di torta.*
- 6 (5%) spiegazioni arrivano all'equiestensione per "compensazione" qualitativa.
  Esempio:*… Quelle di Maria e Sara sono più larghe e quelle di Luca e Carlo sono più lunghe dunque hanno la stessa parte. Sono Sara e Maria ad aver ragione.*
- 33 (27%) elaborati contemplano le misure dei lati delle parti e il calcolo del perimetro, e concludono che la parte delle femmine è quella più grande.
- 15 elaborati (12%), in gran parte di categoria 6, presentano prodotti di misure e 12 di questi si rifanno chiaramente alla formula dell'area del triangolo (sono misurate una base e l'altezza relativa). La conclusione dipende alla precisione delle misure e, evidentemente, dalla formula applicata.
- Si trova ancora qualche procedura per ritaglio, o per tentativi di piegatura e ricoprimento o ancora ricerca di altre unità, che in generale non portano all'equivalenza delle parti: 11 (9%) elaborati.
- Infine, ci sono 21 (17 %) elaborati in bianco o non resi.

Indicazioni didattiche

Su un tema così basilare come la determinazione dell'area di un triangolo, il problema La torta di Nonna Lucia offre molteplici possibilità di lavoro in classe:

- il confronto fra una procedura per pavimentazione o la ricerca di unità d'area "non convenzionale" e la procedura con il calcolo di un prodotto di misure,
- la relazione fra l'area di un rettangolo e quella di due triangoli rettangoli che lo compongono,
- il trovarsi di fronte al conflitto area-perimetro,
- l'imprecisione delle misure di lunghezza prese con il righello e i suoi effetti sul calcolo delle aree,
- l'approccio al ragionamento deduttivo a proposito della suddivisione di un rettangolo secondo le diagonali e le mediane, delle misure di lunghezza e delle aree degli otto triangoli rettangoli.

Bibliografia

Jaquet. F. : 2014 *A propos de triangles* In *Math-Ecole* 222 pp 69-75