EPISTEMOLOGIA/EPISTEMOLOGIE IN CLASSE[4)]

Lucia Grugnetti, Achille Maffini, Carlo Marchini[5]

A Francesco Speranza – Re-inventore dell'Epistemologia della Matematica in Italia

*Résumé : Au travers de quelques exemples par lesquels les élèves montrent leurs conceptions épistémologiques dans une activité inspirée du Menon de Platon, nous discutons des exemples d'épistémologies implicites dans les programmes et dans les pratiques des enseignants ; puis nous présentons une nouvelle manière d'envisager le concept d'*épistémologie, *qui peut être considéré comme intégrant les épistémologies* implicites – explicites. *L'article propose quelques analyses de solutions d'exercices typiques qui montrent les exigences épistémologiques implicites pour leurs traitements, exigences qui peuvent évoluer selon les tâches.*

Summary: *We present examples in which young students show their epistemic beliefs in a school activity inspired to Plato's* Menon. *We discuss examples of implicit epistemology in curricula and in teacher's practice, presenting a new form of epistemology, the* concept epistemology *which can be considered an integration of the dichotomy* explicit – implicit *epistemologies. The paper presents some analyses of typical exercises solutions, showing the hidden epistemological requirements of these treatments, requirements that may change according to the tasks.*

1. Premessa: La globalizzazione epistemologica

In Italia (e forse anche nel mondo) gli argomenti che traggono origine dal problema dei fondamenti e dall'epistemologia della matematica, indipendentemente dalla storia, hanno un modesto impatto sul quadro generale della ricerca didattica (Cannizzaro *et al*., 2004). Si possono trovare solo alcuni spunti, ma di poco conto. Con questo scritto vorremmo evidenziare che l'epistemologia può offrire un punto di vista utile per analizzare alcuni problemi d'apprendimento-insegnamento.

È possibile che l'odierno mancato rilievo delle ricerche sui problemi dei fondamenti della matematica, e sui loro aspetti epistemologici, tragga origine da presentazioni prevalentemente di tipo storicistico della crisi dei fondamenti (tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX). I libri dedicati a questo tema tracciano le origini della teoria degli insiemi, delle strutture algebriche, e le ricerche sul rigore dalla fine del XIX secolo, in linea con molte ricerche sulla storia della matematica. Numerosi contributi didattici attribuiscono all'ambito storico grande importanza nella didattica (Fauvel & van Maanen, 2000) e così può accadere che gli argomenti storici e le fonti originali, anche relativi alla crisi dei fondamenti siano impiegati dagli insegnanti con lo scopo di fare apprezzare agli studenti lo sviluppo di teorie e concetti matematici, partendo dall' 'infanzia' antica per giungere alla 'maturità' odierna, identificando quest'ultima con il più compiuto tentativo di dare risposte ai paradossi ed anche con le nozioni matematiche classiche. Si rischia così di perdere di vista la problematicità scatenata dalla crisi dei fondamenti e i risultati che scaturiscono dalle basi epistemologiche delle varie proposte di soluzione della crisi stessa, come affermano Creath & Maienschein (2000)

> "When there are competing epistemological frameworks, whether because of different styles of work or because of divergent ideologies, how do those differences play out in the science done as a result?"

A nostro parere le odierne ricerche in didattica della matematica assumono una sorta di postulato implicito: si deve insegnare solo la matematica cosiddetta classica; argomenti e situazioni oggetto di studio sono spesso relativi all'insegnamento-apprendimento di contenuti matematici trattati in modo classico. Ciò può trovare ragione nelle proposte ufficiali di curricula per la scuola in cui le analisi approfondite, se lo trovano, hanno poco spazio sia sui programmi, ma ancora di meno nella pratica didattica. Le geometrie non-Euclidee sono un'eccezione all'affermazione precedente, ma esse sono quasi esclusivamente presentate con l'ausilio di modelli costruiti all'interno di un ambito Euclideo. In questo modo alla geometria Euclidea è assegnato un ruolo epistemologicamente preminente, rafforzando oltre tutto l'idea, presente in molti insegnanti che le geometrie

---

[4] Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dell'Unità locale di ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Parma.

[5] Unità Locale di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Parma.

non-Euclidee siano un fatto accidentale e marginale a fronte della 'vera' geometria. Il fatto stesso di usare una negazione per nominarle assume già di per sé la connotazione di scelta epistemologica.

Da notare che la scelta della matematica classica nei curricola nazionali è diffusa in tutto il mondo, anche in nazioni con una tradizione culturale assai diversa da quella occidentale; c'è pertanto una sorta di *globalizzazione epistemologica ufficiale* che ha aspetti comuni a quella che viene identificata col *Platonismo insiemistico* di cui parlano Borga & Palladino (1997).

Per altro, nella didattica della matematica c'è la ricerca di 'nuclei fondanti', cioè di quei temi disciplinari che siano significativi, *in se*, e che permettano, *per se*, una riorganizzazione delle conoscenze. In base a questo approccio, agli studenti viene affidato il ruolo di attori principali nella ricostruzione di importanti argomenti, anche se non hanno la possibilità di portarla a termine in modo completo ed esaustivo, vista la complessità intrinseca dei soggetti trattati.

Tutto ciò quando la ricerca sui fondamenti della matematica specifica esplicitamente questi 'nuclei fondanti', anche se non c'è accordo tra i vari pensatori su quali essi siano. Dall'inizio del XX secolo, scuole di pensiero differenti hanno proposto risposte diverse a problemi fondamentali quali: cosa sono i numeri, gli enti geometrici, le basi per fondare la matematica, riservando un ruolo cruciale agli aspetti logici, oppure insiemistici, a quelli relativi alla teoria delle categorie, agli algoritmi, all'intuizione, ecc. Il panorama è vario: un'istantanea storica di questi problemi può aiutare l'insegnante a comprendere i diversi approcci ed anche le difficoltà degli studenti nell'apprendimento.

Però, solo una conoscenza approfondita dei problemi posti dalla ricerca sui fondamenti può portare un insegnante consapevole ad appropriarsi dei vari concetti, solitamente oggetto di presentazione in classe, aiutandolo nella decisione di tacere oppure affrontare (in modo consapevole) i molti problemi connessi a tali concetti. Ogni argomento matematico, infatti, anche se viene trattato col massimo rigore, nasconde questioni che richiedono una profonda riflessione perché esso si basa su problemi senza un'unica risposta, ma con risposte diverse in relazione alle diverse scelte filosofiche di fondo; e si badi non è una questione di rigore: l'affrontare un argomento col dovuto rigore (relativo ovviamente all'età scolare a cui è indirizzato l'argomento) è una condizione che diamo per scontata, ma questa è già un problema successivo alla scelta di impostazione che si è fatta. Capire e far capire tale aspetto ai propri studenti riteniamo faccia parte dei doveri professionali di ciascun insegnante. Così quando ci si pone il problema (didatticamente rilevante) se uno studente abbia fatto suo un determinato concetto, non si sottolinea a sufficienza che ciò di cui si parla non è qualcosa di assoluto, quanto piuttosto relativo al concetto mediato dall'insegnante, frutto a sua volta dell'epistemologia implicita di quest'ultimo([6]).

Purtroppo sembra che, anche nella ricerca didattica, sovente questi problemi non abbiano rilevanza, perché implicitamente si accetta l'idea che esista **la** matematica, quella che viene insegnata nelle scuole ([7]); approcci differenti hanno solamente un gusto 'esotico' che non trova spazio, in genere, nella disciplina e quindi non permea le ricerche didattiche.

Non di meno, gli studi sui fondamenti della matematica danno luogo ad approcci differenti e ad un atteggiamento critico nei riguardi della conoscenza della matematica (classica), mostrandone limiti e incrinature, proponendo, di fatto, epistemologie della matematica diverse da quella 'imperante'.

2. Epistemologie *esplicita* ed *implicita* ed altro ancora

Prendendo spunto da Speranza (1997) si possono identificare l'epistemologia *esplicita* e quella *implicita*. L'epistemologia *esplicita* cerca di fornire gli strumenti e gli esempi per l'analisi dei contenuti e dei metodi della conoscenza 'certa'.

([6]) In (Iori,2007a), (Iori, 2007b), (Iori, 2007c) e (Iori, 2008) si propone una ricerca e un'analisi sull'epistemologia dell'insegnante sulla sua conoscenza professionale. In particolare, in (Iori, 2007a) si sottolinea come il concetto di "epistemologia" che si evince dalle diverse "definizioni" presenti sui vari testi, quella dell'insegnante (contrapposta a quella della disciplina) si ricollega all'epistemologia vista come disciplina filosofica che si occupa della natura, delle fonti e dei limiti della conoscenza umana ("gnoseologia" o "teoria della conoscenza"). Il lavoro di Iori si pone nel nuovo filone di ricerca in didattica della matematica, denominata didattica C, in cui si pone primo piano proprio l'epistemologia dell'insegnante, la sua formazione, le sue convinzioni e il suo ruolo (si veda (D'Amore, 2006)). Tra le domande proposte nel questionario somministrato a 48 insegnanti di diversi ordini scolastici (compresi specializzati SSIS), quelle che più direttamente interessano il nostro discorso riguardano la richiesta di competenze che deve possedere un insegnante di matematica (Domanda 2) e l'individuazione di criteri per capire se un allievo ha "capito per davvero" un concetto matematico (Domanda 5). Come sottolineato dalla ricercatrice, nelle risposte alla Domanda 2 l'epistemologia della matematica è citata raramente (solo 6 insegnanti).

([7]) Diversi insegnanti, ad esempio, vedono nell'uso di modelli geometrici per giustificare questioni algebriche come alcuni prodotti notevoli (soprattutto quadrato del binomio e differenza di quadrati) la conferma di questo articolo determinativo '**la**'. In questo atteggiamento implicitamente si assume che esista **la** geometria e **la** algebra e che coincidano. L'ipotesi di una scelta implicita nella trattazione proposta non è evidentemente contemplata.

Molto importante è la presenza della epistemologia *implicita* dei curricola, dell'insegnante e dell'allievo, perché può essere motivo dell'insorgere di ostacoli. È una constatazione ovvia che anche senza un insegnamento esplicito del tema, al termine di un percorso di formazione della durata minima di 19 anni di studi, dalla scuola primaria alla SSIS (ormai defunta), nell'insegnante sviluppano quadri di riferimento e scale di valori che possono essere indicati col termine, forse ambiguo, ma suggestivo, di epistemologia *implicita*([8]).

Meno ovvio può apparire che anche i bambini più piccoli già dai primi anni di scuola non si presentano con la *tabula rasa,* relativamente a processi e conoscenze che si possono ritrovare nella storia della speculazione filosofica. Di tale epistemologia *implicita* degli allievi, l'insegnante deve tenere conto, perché

> "…le forme del sapere di chi insegna, di chi orienta l'apprendimento, non coincidono necessariamente con le forme di chi tesse una rete di significati per la propria comprensione." (Armella, 1999).

Una naturale difficoltà consiste nel far diventare l'epistemologia oggetto di conoscenza esplicita per l'insegnante e chiarirne il ruolo nell'insegnamento, sulla base anche di un pregiudizio secondo cui sia difficile, se non impossibile, introdurre aspetti epistemologici senza una salda base di conoscenze storiche.

D'altra parte la scuola contribuisce allo sviluppo della conoscenza negli allievi, tramite l'insegnamento/apprendimento, per questo l'insegnante deve interrogarsi sulla conoscenza in sé, tenendo conto che sovente le presentazioni delle più comuni tesi o proposte epistemologiche fanno riferimento (implicito) ad un individuo adulto ed istruito, non ad un allievo in formazione.

Strettamente connesso al problema del connubio tra didattica ed epistemologia, si inserisce quello tra didattica e filosofia. Lo snodo cruciale risiede anche e soprattutto nel significato che si assegna a questi termini ed agli obiettivi connessi. Si tratta, in buona sostanza, di fare 'filosofia matematica' o analizzare il rapporto tra la filosofia e la matematica ([9])? La risposta che a noi sembra più scontata è la prima, ma cosa significa fare della 'filosofia matematica'? E come legare questo aspetto, di indubbio valore culturale, con una esigenza di contenuti con cui la scuola fa necessariamente e continuamente i conti?

Per quanto proponiamo in questo nostro contributo si potrebbe coniare il neologismo *filomatica*, oppure sarebbe più opportuno parlare di matematica filosofica e quindi coniare *matesofia*?

L'ostacolo a fornire la risposta alle precedenti domande è anche da ricercare nella difficoltà, per certi aspetti, di distinguere la matematica dalla filosofia, se per filosofia si pensa ad una approccio razionale alla ricerca della verità.

Il presente lavoro propone alcune chiavi per rispondere a tali questioni, sulla base di progetti o di attività svolte in classe. Alla fine cercheremo di vedere quale risulterà più significativo, secondo noi, tra i neologismi proposti. Si parte da un presupposto che costituirà l'assunto di base del nostro discorso: la 'filosofia matematica' si pone prioritariamente come approccio ai contenuti (o meglio, ai concetti) e come tale non può prescindere dal linguaggio essenziale per la loro gestione sul piano semiotico.

Tradurre sul piano operativo l'assunto non è semplice, poiché richiede un metodo diverso da quello che normalmente viene proposto: non quindi dalla filosofia ai contenuti specificamente matematici, quanto dai contenuti all'individuazione del pensiero su cui si reggono.

In questo approccio si intravede già una nostra posizione che può essere usata per distinguere il tipo di analisi che proponiamo dei sistemi filosofici o epistemologici: questi spesso procedono al contrario, collocando i vari soggetti di speculazione in un quadro teorico che vorrebbe essere tanto comprensivo, quanto esplicativo.

L'irruzione dell'incompletezza nella discussione metamatematica ci consiglia di andare cauti e quindi di fare proposte che traggano spunto dalla prassi usata nella presentazione dei contenuti, per riconoscere nel consueto modo di insegnare inaspettate coincidenze con sistemi o approcci filosofici noti nella letteratura. Marchini ha presentato, in alcune conferenze, esempi di come sia possibile una sorta di epistemologia *locale*, come occasione di riflessione sulla conoscenza matematica spesso inglobata in momenti e scritture consuete dell'attività didattica. Ma l'aggettivo *locale* connesso ad epistemologia può provocare perplessità, anche per la presenza nella letteratura di questa locuzione. Chiariremo meglio la nostra posizione in un successivo paragrafo.

([8]) Durante un laboratorio di didattica della matematica tenuto da Achille Maffini pressa la SSIS di Parma, è stato chiesto agli specializzandi di indicare, come commento ad una serie di frasi riferentesi a varie concezioni della matematica (si veda nell'allegato 1 la scheda consegnata agli specializzandi), la loro concezione della matematica. I risultati, che tendenzialmente variano da anno in anno (senza differenze significative tra le risposte dei laureati in matematica e i laureati in fisica), evidenziano in generale una prevalenza della concezione formalista, seguita, con frequenze molto vicine, dalle concezioni platonista e costruttivista. Chiaramente lo strumento proposto non aveva un obiettivo diagnostico, quanto piuttosto quello di porre i futuri insegnanti nelle condizioni di riflettere criticamente sulla loro epistemologia implicita della matematica.

([9]) O anche una storia del rapporto tra filosofia e matematica? Oggi nelle aule scolastiche ed anche in quelle universitarie, i rapporti tra matematica e filosofia sono spesso ignorati. Si perde così l'occasione per presentare la matematica come una 'scienza umana' o, addirittura, come una chiave di lettura ed interpretazione delle cosiddette 'scienze umane'.

Si badi bene che, seppure l'argomento sia indirizzato soprattutto verso l'insegnamento della matematica, nulla vieta di fare il percorso inverso, cioè utilizzare, in ambito filosofico, contenuti matematici come pretesto per una riflessione sulle modalità di approcci di carattere epistemologico alle due discipline. È quanto è stato proposto, ad esempio, nei laboratori tenuti da Achille Maffini dell'indirizzo Scienze Umane della SSIS Emilia Romagna della sezione di Parma e di cui si fornisce una parziale documentazione in (Maffini, 2002). In quel contesto, ciò che importava, preminentemente, era fornire le basi per un possibile percorso di confronto interdisciplinare. Il risultato più significativo è stato il vedere, attraverso le unità didattiche prodotte dagli specializzandi per l'esame, come lo stesso argomento di carattere matematico potesse essere poi 'piegato' per rispondere ad esigenze di conoscenza di tipo filosofico([10]).

3. Epistemologia *implicita* degli allievi

Ci sono in letteratura contributi sull'epistemologia dell'insegnante, come ad esempio il già citato lavoro di Iori e la relativa bibliografia. Vogliamo offrire qui alcuni esempi di come sia forte e importante la componente epistemologica implicita nel bagaglio di conoscenze, molte delle quali non scolastiche, degli allievi, anche i più piccoli, come un implicito suggerimento agli insegnanti di analizzare la propria epistemologia *implicita*.

I primi esempi che seguono sono tratti da esperienze nella scolarità precedente la Scuola Secondaria di Secondo grado e mettono in luce come gli aspetti investigati siano assai raramente oggetto di insegnamento esplicito nell'intero curricolo degli studi. Quindi c'è il reale rischio che su temi matematici importanti e filosoficamente rilevanti (spazio, uguaglianza, infinito, approssimazione, problemi connessi alla natura dei numeri reali, ecc.) anche negli anni di scuola superiore, gli studenti possano avere come unica base della comprensione solo le loro pre-concezioni, maturate al di fuori della scuola e nei primi anni di scolarità obbligatoria o anche precedentemente ad essa.
Affinché queste pre-concezioni siano oggetto di studio e riflessione, bisogna fare in modo da porle in luce e solo così l'insegnante ne può tenere conto, per

- impostare la sua azione didattica, in modo rispettoso delle idee dei giovani,
- poter farle evolvere

e, una volta giunte ad una consapevolezza matura,

- farle accettare in modo critico.

Un campo di ricerca didattica, ed anche di filosofia([11]), è l'identificazione della presenza di importanti quadri teorici abbozzati in modo inconsapevole, ad iniziare dalla scuola dell'infanzia. Per gli alunni più piccoli ci si deve confrontare con la difficoltà di comunicazione. Infatti, non è possibile una 'intervista' diretta sul tema da indagare e si devono quindi trovare strumenti che rendano possibile la ricerca con le finalità fissate. Ogni indagine in questo campo richiede uno studio preliminare sugli strumenti da impiegare e sulla loro rispondenza allo scopo.

In (Marchini, 2008) si mostra come l'intuizione dello spazio, da parte di bambini di ultimo anno di scuola dell'infanzia e dei primi due anni di scuola primaria, si suddivide in due filoni principali: l'interpretazione platonica dello spazio *indipendente* e quella aristotelica dello spazio *non indipendente* (Speranza, 1997). Ciò è rivelato mediante il disegno di 'cornicette'. Anche la bibliografia riportata da Marchini (2008) può fornire utili suggerimenti per indagini di questo tipo. Sorprendentemente si hanno sopravvivenze di questi approcci personali anche in studenti di scuola secondaria, come mostrano alcuni protocolli raccolti.

Nello stesso filone di ricerca si può collocare quanto esposto da Pezzi (2002), in cui il mezzo espressivo del bambino è principalmente la manipolazione.

Nel presente testo si mostrano due episodi di una ricerca iniziata con altre finalità, e che qui vengono analizzati dal punto di vista della rivelazione di epistemologie implicite.

Per meglio intendere la nostra interpretazione delle risposte degli allievi, si utilizzeranno nel seguito caratteri diversi, secondo la seguente codificazione: abbiamo evidenziato le diverse presenze di concetti quali l'approssimazione e l'infinito, distinguendo quest'ultimo in potenziale e attuale. Per questo scopo abbiamo utilizzato il colore come elemento distintivo. A partire da tre colori (blu, rosso, verde) come indicatori di

---

([10]) I temi tratti nei laboratori SSIS sono stati due: l'*infinito* e le *geometrie non euclidee*. In particolare con questo secondo argomento si è visto come un tema matematico abbia svolto il ruolo di mediatore di conoscenza filosofica, declinato secondo diverse direttrici.

([11]) L'individuazione di aspetti filosofici deducibili dalle pre-concezioni dei bambini pongono l'interrogativo se queste presenze sono dovute all'acquisizione della motricità, del linguaggio, ecc., oppure se i filosofi del passato (e non solo) hanno dato voce a una sorta di filosofia connaturata con l'essere umano. Una situazione analoga sussiste per quanto riguarda la matematica. Interessante la posizione antropologica di (Dehaene, 2000):

> "L'universo è davvero scritto in linguaggio matematico, come affermava Galileo? Sono piuttosto incline a pensare che questo sia l'unico linguaggio che noi sappiamo leggere.".

specifici aspetti, sono state proposte per ciascun colore due intensità per individuare categorie specifiche. Ne è risultato un codice dei colori è:

Blu: per indicare l'infinito. Col blu segnaliamo presenze di infinito attuale, con l'azzurro, presenze di infinito potenziale.
Rosso: approssimazione. Rosso scuro, approssimazione matematica, rosso, approssimazione fisica.
Verde: compresenza di infinito e approssimazione. Verde, maggiore presenza dell'infinito, verde limone, dell'approssimazione.

Per rendere meglio visibile il colore abbiamo anche utilizzato un font diverso, Arial Black. Questa scelta può, forse, rendere faticosa la lettura, ma pone bene in evidenza le scritte colorate.

3.1. Il progetto Menone nella Scuola Primaria (Classi IV e V)

Il problema prende spunto dal famoso passo dell'omonimo dialogo platonico in cui Socrate pone ad un servo di Menone il quesito di costruire un quadrato di area doppia rispetto a quella di un quadrato assegnato([12]).

L'attività è stata proposta a 10 classi, assegnando un quadrato bianco e 4 coppie di quadrati colorati. I quadrati sono tutti uguali tra loro. La consegna prevedeva di costruire un quadrato con area doppia di quello bianco, utilizzando tutto il cartoncino di una delle coppie di quadrati colorati, da ritagliare ed incollare opportunamente sui fogli bianchi. Unici strumenti consentiti: forbici, righello non graduato, colla.

La scelta di far operare mediante artefatti (i quadrati di cartoncino) è dettata dal curriculum della Scuola Primaria che prevede, appunto, la trattazione di vari argomenti a livello visuale e operativo, mediante manipolazione.

Una volta trovata la soluzione geometrica (il quadrato di area doppia), nella fase successiva si è richiesta la determinazione del rapporto tra la diagonale ed il lato del quadrato.

L'attività è stata svolta in lassi di tempo variabili dalle 2 alle 3 ore. Questa differenza è prevalentemente dovuta ai diversi tempi impiegati dagli alunni per le costruzioni dei quadrati, tempi dipendenti in larga parte dai loro prerequisiti. Va infatti segnalato che le classi coinvolte si riferivano a contesti molto diversi e distanti, non solo chilometricamente, ma anche dal punto di vista della formazione specifica.

I risultati raggiunti con l'attività si possono sintetizzare nei seguenti punti:

1) L'importanza dei prerequisiti: nelle classi in cui è stato fatto un lavoro specifico sui ricoprimenti e sulla scomposizione di poligoni, la soluzione è stata trovata in poco tempo (circa 10-15 minuti).

2) Come tentativi iniziali, tutti gli alunni ritagliano i quadrati in rettangoli (o quadrati). Una prima motivazione di questo atteggiamento va ricercata nella 'analogia' con la figura di partenza delle figure utilizzate (si parte da un quadrato e si pensa che la decomposizione debba essere in quadrati o rettangoli). Un bambino (di una classe V) ha però evidenziato come il riferirsi alla figura quadrata si configuri come un tentativo di trovare l'unità di misura adeguata allo scopo: nella sua convinzione, sarebbe, infatti, bastato ritagliare quadretti "sufficientemente piccoli".

Alla domanda dell'insegnante *"*ma come fai a sapere qual è il quadrato di area doppia se non conosci il lato?*"* ha risposto "ma come faccio a conoscere il lato se non ho il quadrato e non ho la misura?".

Nella risposta è interessante evidenziare l'atteggiamento filosofico del bambino: quale priorità hanno, nella conoscenza, i problemi dell'esistenza di figure? Le figure esistono perché si possono costruire (secondo una concezione euclidea) o esse esistono di per sé e da esse se ne deducono gli elementi specifici?

Queste domande rimandano esplicitamente alle posizioni ontologiche e di teorie filosofiche (formalismo, platonismo, neo empirismo, ecc.) sulla natura degli oggetti matematici. Riteniamo che si possa interpretare la risposta del bambino come una sua implicita adesione alla concezione platonista.

3) È stato indotto un paradigma estetico riferito all'individuazione della soluzione 'più bella'. Tra le varie soluzioni proposte dagli alunni (riconducibili a quanto riportato in figura 1, è stato chiesto quale fosse la 'più bella'. Il tratto rilevante è stato il passaggio da un'idea soggettiva su base estetica ad una condizione oggettiva legata al numero dei tagli necessari e quindi alla maggiore o minore introduzione di errori (la soluzione migliore, da questo punto di vista, è stata considerata la prima della figura 1 e tale soluzione si è guadagnata l'appellativo di 'più bella'). Detto passaggio, riconducibile ad un'idea di 'giudizio consapevole', è stato compiuto in tutte le classi in cui è stata proposta l'attività.

([12]) Ci riferiamo alla versione del *Menone* come appare in (Platone, 1991).

Ci si consenta una parentesi esplicativa sul ruolo del ‘giudizio consapevole’. Spesso si parla di approccio critico alla matematica e ai risultati ottenuti in specifiche situazioni problematiche. Ciò che per noi è invece prioritario nell’idea di ‘giudizio consapevole’ è che lo studente di qualunque età colga in un ambito anche esterno alla matematica in senso stretto, ad esempio in ambito estetico (e quindi legato ad un giudizio di ‘bellezza’), una consapevolezza che riporti la valutazione sul piano del ‘vantaggio’ razionale. La valutazione sulla costruzione del quadrato è apparentemente semplice, ma se sviluppata come paradigma di approccio, può aprire interessanti prospettive future. Ad esempio, prima di proporre un teorema può essere opportuno valutarne ‘esteticamente’ l’importanza (si pensi ad esempio al teorema delle matrici orlate di Kronecker per la determinazione del rango di una matrice) oppure per giustificare alcuni approcci tipici della geometria analitica. A tale proposito, si allega una scheda di lavoro (Allegato 2) proposta in una classe terza Liceo Scientifico in cui, utilizzando il software Cabri si induce lo studente a ricercare il sistema di riferimento migliore per lo studio di coniche facendo leva su una valutazione estetica della relativa equazione. Lo sviluppo di modalità che portino a ‘giudizi consapevoli’ non sono per noi secondari rispetto ad altre finalità: nella nostra idea la filosofia matematica, dovrebbe sostanziarsi anche nella possibilità di sviluppare scelte, scelte che muovano dal riconoscimento di ottimizzazioni razionali. Non si tratta di individuare strumenti che meglio rispondano a determinati problemi (come normalmente è inteso il senso critico nei confronti degli oggetti matematici), quanto piuttosto riconoscere nelle situazioni strutture e condizioni che portino a scelte razionali soggettivamente consapevoli.

Passare dal piano soggettivo per riconoscere ottimizzazioni nei concetti comporta una presa di coscienza del soggetto di una razionalità comune e questo si inserisce in un filone filosoficamente significativo (dal punto di vista matematico) che prende avvio soprattutto nell’Ottocento (ma riscontrabile anche negli *Analitici Secondi* di Aristotele) e che trova nella famosa frase di Cantor (1932): “Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit”, la migliore connotazione. Nel caso specifico, lo studente è libero di scegliere modi di procedere e tagli da effettuare (e questo non influisce sulla sua capacità di ‘vedere’ nel risultato un quadrato), ma diventa consapevole della opportunità, in quel contesto, di una specifica soluzione.

Su questo aspetto torneremo anche in seguito a proposito della Scuola Secondaria di primo grado.

Torniamo alla descrizione della sperimentazione effettuata. È importante sottolineare come spesso gli alunni ‘riconoscessero’ nella figura ottenuta un quadrato anche in presenza di evidenti errori di costruzione. In questo atteggiamento è possibile riscontrate una tendenza all’astrazione vista non come difficoltà, ma al contrario come esigenza: all’approccio empirico è connaturato un ‘errore’ che solo l’approccio razionale (riscontrabile in questo caso nel riconoscimento delle proprietà delle figure) permette di superare.

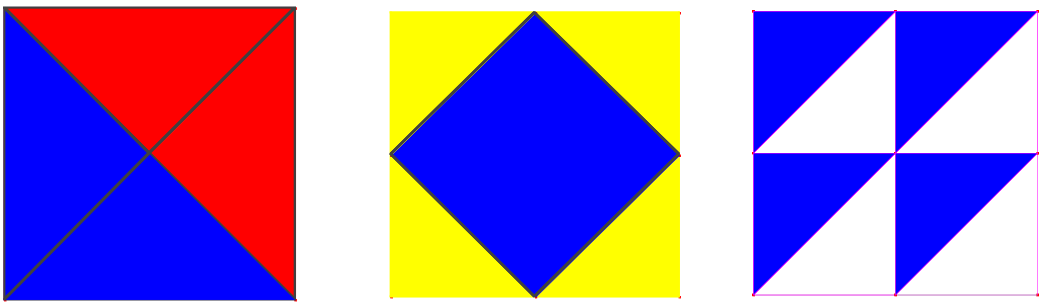

Figura 1

4) L’uso diffuso, malgrado le consegne iniziali lo proibissero, del righello graduato evidenzia una tendenza ad identificare il segmento (lato del quadrato) con la sua misura (vedi anche punto 2 precedente), segnalando così, conformemente ad un atteggiamento pitagorico, una maggiore dimestichezza con gli enti aritmetici e il conseguente tentativo di riportare ad essi gli enti geometrici([13]).

5) Emergono nelle attività ipotesi di accettabilità dei risultati. Tali ipotesi sono viste in termini semantici come condizioni di approssimazione legate a problemi specifici (questo è avvenuto quando si è passati dall’attività alle applicazioni di quanto appreso).

> “Nei quadrati più piccoli non si potrebbe neppure vedere la differenza.”([14]) (V Primaria)

> “Rapporto uguale circa a 1,41. Si può accettare perché se ci metto dei pezzettini più piccoli non si vede neanche.” (V Primaria)

([13]) Su questo aspetto torneremo in seguito a proposito della Scuola Secondaria di primo grado.
([14]) La considerazione si riferisce al trovare molti decimali procedendo nella divisione.

“Quante cifre decimali devo considerare?” (relazione tra il numero delle cifre decimali e l’utilizzo in contesti pratici del rapporto numerico trovato) (V Primaria)

6) La percezione che il rapporto (visto come operazione matematica legata alla misura) evidenzia la differenza concettuale tra misura fisica (condizione di determinazione) e misura matematica (condizione di esistenza).

“Andare molto avanti nella divisione, cioè trovare molti decimali” (V Primaria)

3.2. Il Progetto Menone nella Scuola Secondaria di primo grado (Classe II)

L’attività consiste nel ripercorrere con la classe il problema di Socrate utilizzando il dialogo come canovaccio noto solo all’insegnante e non agli alunni. In sostanza l’insegnante recita la parte di Socrate, gli alunni quella del servo, ma senza conoscere il copione. Con ciò si voleva appurare se gli alunni ricalcano lo stesso percorso (o un percorso analogo) a quello del servo di Menone.

I risultati ottenuti con l’attività si possono riassumere nei seguenti punti:

A) L’esistenza della misura del segmento è vista in relazione all’esistenza della lunghezza; in sostanza l’esistenza della grandezza geometrica era per gli alunni una condizione ‘fiduciale’ sull’esistenza di un opportuno insieme numerico in cui ‘trovare’ la misura del segmento. È riscontrabile quindi una sorta di ‘bisogno’ (traducibile formalmente col fatto che la relazione che associa ad un segmento un opportuno numero, che ne individui una misura, sia una funzione), lo stesso che didatticamente si riscontra nelle condizioni di ampliamento degli insiemi numerici (e anche in questo caso il bisogno è riconducibile all’esigenza di far diventare ovunque definite relazioni che sono solo funzionali). Un ragazzo, ad esempio, di fronte alla domanda “*Perché vorreste che ci fosse un numero associato al segmento*” ha risposto

“Perché altrimenti ci sarebbe un buco nella retta dei numeri”.

Abbiamo riportato in blu la frase precedente perché la risposta richiama un’idea di completezza dell’insieme dei numeri reali ed una prima intuizione del pensiero strutturale.

Un’altra risposta per noi significativa è la seguente:

“Quindi si riesce a costruire il quadrato, ma non si riesce trovare la misura del lato perché il numero è un decimale illimitato.”

B) Il dialogo platonico, utilizzato come canovaccio non noto agli studenti, ha prodotto lo stesso percorso e grosso modo le stesse risposte date dal servo di Menone (e questo in tutte le classi in cui è stato presentato). Ciò permette di vedere nel dialogo quello che era stato uno dei meta-obiettivi di Platone: il suo ruolo didattico. Di fatto Platone propone ‘un esempio’ di come la conoscenza possa essere acquisita e, come sottolineato da diversi commentatori (Toth, 1998), (Stellica, 1994), (Serres, 1994), non è un caso che utilizzi un problema matematico per sostenere il suo assunto.

C) Il dialogo *Menone* ha al suo interno due punti critici che lo hanno reso oggetto di studio: la rottura del contratto di Socrate col servo([15]) e, conseguentemente, ‘la comparsa dell’*irrazionale* nell’universo del *logos*’ (Toth, 1998). Questo brusco e significativo passaggio dalla richiesta numerica (la misura) a quella geometrica (esistenza del segmento) non poteva non creare problemi ad allievi di 11-12 anni e così in effetti è stato. Il cambio di richiesta (che può configurarsi come la rottura significativa del contratto didattico iniziale), è stata vissuta dagli studenti in modo destabilizzante e con difficoltà. Tracce significative di ciò sono rintracciabili anche nelle relazioni degli alunni:

“Così il Prof. ci ha posto un’altra domanda: è sicuro che il numero che corrisponde alla misura del lato esista? ([16]) A questo punto ha cambiato consegna: dovevamo trovare, al posto della misura del lato, il lato stesso del quadrato con area doppia rispetto al quadrato di partenza.”

([15]) “Il filo della discussione passa bruscamente dall’aritmetica alla geometria: *se preferisci non fare calcoli allora mostra*. […] Socrate bara: egli sa che non troverà la lunghezza esatta” (Serres, 1994).

([16]) Molte relazioni riportano questa come domanda, mentre nella registrazione dell’attività emerge come la domanda fatta dall’insegnante, a questo punto, fosse relativa all’esistenza del lato del quadrato (la richiesta sull’esistenza della misura è successiva). In questo atteggiamento si possono evidenziare diversi aspetti, sia di carattere epistemologico che didattico. Dopo il fallimento dei pitagorici (dove per fallimento non si intende la scoperta delle grandezze incommensurabili, quanto la percezione della presenza dell’infinito attuale nel problema della misura), la geometria ha scelto la strada delle grandezze, strada di cui gli *Elementi* di Euclide costituiscono una significativa testimonianza. La misura compare molto più tardi e trova la sua collocazione definitiva nell’Ottocento. Ciò che invece rimane, in termini epistemologici, è la *speranza*, che aveva sorretto il lavoro dei pitagorici, di esprimere le grandezze mediante numeri. La didattica della scuola Primaria in Italia ha fatto propria questa speranza, facendola diventare *necessità*. Le grandezze sono così sparite dai curricula, lasciando il posto alle misure (figlie a loro volta di mediatori didattici quali i numeri-colore o semplicemente il dominio del foglio a quadretti (Vighi, 2006)). Risulta quindi naturale che per gli alunni un segmento sia identificato con una misura, non percependo la distinzione tra i due enti.

"Allora il prof ha voluto lasciare in sospeso la questione [dell'esistenza della misura] e siamo passati a geometria."

"L'ho trovato difficile, non riuscivo a capire cosa volesse."([17])

"Lasciati da parte i numeri, siamo andati alla parte pratica [intendendo in questo modo la geometria]"

"Abbiamo tralasciato la ricerca del lato e abbiamo provato a costruirlo."([18])

"In questa lezione ho capito che possiamo rappresentare il quadrato di area doppia ma non possiamo trovare il numero. Dovremmo andare avanti ma non potremo mai arrivare al numero preciso."

"Siamo riusciti a disegnare il lato, ma il numero esatto non l'abbiamo trovato e quindi la figura geometrica è stata approssimata".

D) L'uso della calcolatrice porta problemi. Si è assistito ad un passaggio dalla fiducia nello strumento nell'individuazione della soluzione (espressa da $\sqrt{8}$)([19]) alla sua messa in discussione. Ciò ha permesso di riconoscere l'inadeguatezza dello strumento, non solo dal punto di vista pratico (e quindi obbligare a guardare in modo critico i risultati conseguiti), ma anche dal punto di vista concettuale. Il problema dell'esistenza dell'irrazionale diventa prima di tutto un problema di non esistenza di un razionale; la non esistenza presuppone sui numeri razionali una quantificazione universale (percepita anche durante la costruzione col metodo di bisezione di una successione di numeri razionali approssimanti $\sqrt{8}$) con un conseguente e naturale disorientamento degli alunni. La dimostrazione della non razionalità è quindi partecipata come una condizione di economicità (che ricorda le posizioni dell'empiriocriticismo di Avenarius), oltre che un modo per ottenere (al finito) certezze.

"Nonostante il risultato si avvicinasse molto a 8, la misura del lato non era precisa"([20])

"Però con gli strumenti che avevamo non riuscivamo a calcolare il lato e continuando a fare molti tentativi ci chiedevamo se il numero esistesse davvero"

"Il professore ci ha dimostrato che il numero non è razionale".

"Secondo me la radice non esiste perché si possono trovare infinite cifre, mi avvicino, ma non lo trovo".

"Andando avanti così([21]) trovo dei valori sempre più vicini a 8 per difetto o per eccesso."

"… non si arriva mai alla fine allora ci siamo chiesti: ma questo numero esiste davvero?"

E) Si è riconosciuta la necessità di un ampliamento dell'insieme dei numeri razionali e l'individuazione della tipologia di numeri richiesti (numeri decimali illimitati non periodici) come unica tipologia 'non nota'. In questa idea di completamento risiede la probabile necessità di fornire un senso ad ogni forma numerica (decimale). La difficoltà, anche per gli alunni, è nella capacità formale di costruirli e pure in questo aspetto è riscontrabile un atteggiamento filosofico riconducibile al problema dell'esistenza di un ente matematico.

"Da questa lezione abbiamo concluso che questo numero non fa parte dell'insieme, che già conosciamo, dei numeri razionali, ma ad un altro insieme numerico."([22])

([17]) La difficoltà evidenziata dall'alunno è originata dal cambio di richiesta e dal non capire quale fosse la consegna reale.

([18]) L'affermazione si ricollega a quanto detto nella nota 11: la ricerca del lato è identificata con la ricerca della misura. Interessante comunque la percezione di 'costruibilità', dove questo concetto, in termini euclidei, richiede la conoscenza di quali strumenti si hanno a disposizione per farlo. In questa affermazione dell'alunno si può anche vedere la 'disponibilità' ad una diversa idea di matematica rispetto a quella precedentemente vista e riconducibile al platonismo: gli oggetti matematici potrebbero non esistere se non si è in grado di costruirli. Da osservare che in questo caso non si afferma che l'alunno pensa ciò, quanto piuttosto che non lo esclude. La matematica quindi può essere anche una costruzione dell'uomo (in analogia al costruttivismo di Kronecker) e questa idea può essere presente anche in giovani alunni.

([19]) Attualizzando il dialogo platonico in cui si parte da un quadrato di lato 2 piedi.

([20]) L'alunna si riferisce al tentativo fatto con la calcolatrice e il successivo elevamento a quadrato del valore trovato.

([21]) Cioè sempre dimezzando l'intervallo individuato dai valori che forniscono approssimazioni per difetto e per eccesso.

([22]) E' interessante notare come ci sia da parte dell'alunno la certezza che questo numero esista, rafforzando così la convinzione della presenza di idee fiduciali di esistenza. Queste che sembrano essere pre-concezioni degli alunni, si radicano, a nostro avviso, sulle basi stesse della filosofia occidentale che, non dimentichiamolo, è soprattutto una filosofia dell'Essere. Sarebbe però puramente accademico pensare che l'importanza di questa osservazione sia solo di tipo filosofico. Noi riteniamo, al contrario, che questo sia uno dei casi significativi in cui il paradigma filosofico induce una lettura in chiave epistemologica della conoscenza dello studente con chiare ricadute sul piano didattico: l'insegnante che sa o prende coscienza di questo 'atteggiamento' da parte dell'alunno sa anche che può contare su un terreno fertile per l'introduzione di specifici argomenti. L'azione didattica quindi non dovrebbe essere vissuta come estranea proprio perché fa leva 'su un pensiero' di cui l'alunno è partecipe. Nelle unità di apprendimento, costituenti i mattoni del percorso didattico nella scuola dell'obbligo, viene data molta enfasi ai 'bisogni' dell'alunno e al loro essere alla base della costruzione dei percorsi didattici. A volte tali bisogni possono essere di difficile individuazione, o meglio, può essere difficile tradurli in contesti didattici. Il nostro invito, anche in base delle precedenti osservazioni, è di andare oltre e pensare al bisogno in termini soprattutto culturali e non solo contingenti.

"Dopo questa lezione però io non ero convinta e ci ho provato da sola ad andare avanti con i numeri ma ho visto che dovevo aggiungere i decimali. Questo mi ha fatto capire che i decimali sono infiniti."

"I decimali continuano ad aumentare e non finiscono."

"Avrà sempre cifre diverse, però non riusciamo ad immaginarlo tutto."

"Ma allora i numeri irrazionali sono tanti perché di tanti numeri non ho la radice esatta. Mi sembra che l'infinito in matematica sia dappertutto."

F) La costruzione delle successioni approssimanti (qualcuno le ha classificate come un "*particolare metodo*"), è vista sia come modalità di lavoro che come strumento di approssimazione. Inoltre le successioni approssimanti sono a loro volta adottate come strumento (matematico), che evidenzia l'inadeguatezza del righello come strumento (fisico), nella determinazione della misura della diagonale. In quest'ottica la costruzione delle successioni si configura come un primo passo del passaggio dal processo all'oggetto per quanto riguarda il concetto di limite.

"È la misura della diagonale… Non riesco a misurare perché devo andare sotto i millimetri."

A: "È una lunghezza, quindi esiste. Possiamo misuralo col righello."

P:" Il righello non è uno strumento molto preciso."([23])

Insegnante:

"Ma allora il problema è: questo numero esiste e quindi vale la pena andare avanti col nostro metodo oppure con questo metodo non riusciamo a trovarlo? Questo che cosa significherebbe?"

Alunno 1: "che il metodo non funziona".([24]) Alunno 2: "oppure che non c'è"([25])

"Ci si avvicina sempre di più al valore ma non si raggiunge mai perché si trova sempre un punto medio."([26])

G) Come detto, l'attività sul *Menone* si inserisce in un percorso più generale finalizzato alla costruzione del concetto di limite. Nei riscontri degli studenti si evidenziano, in effetti, i primi accenni a condizioni di completezza per un insieme numerico e al concetto di limite. Quest'ultimo, in particolare, non è solo visto e vissuto dal punto di vista tecnico, ma deve essere 'pensato', anche in ottica didattica come un concetto che affonda le sue radici sui capisaldi culturali occidentali con la conseguente necessità di operare delle 'scelte' (filosofiche) sul piano della sua rappresentazione. I risultati ottenuti ci sembra rafforzino la nostra idea della presenza precoce nei primi anni di scolarità dei presupposti filosofici alla base di concetti matematici anche complessi. C'è da dire che non si tratta di una presenza generalizzata tra gli alunni di una stessa classe, ma egualmente bastano uno o due alunni per innescare in classe un processo di avvicinamento al limite, e soprattutto è indispensabile che l'insegnante non lasci cadere nel nulla queste pre-concezioni così rilevanti per gli sviluppi matematici successivi. Il favorire lo sviluppo di tali presupposti risulta quindi un modo per costruire negli alunni gli strumenti necessari per affrontare e superare le difficoltà che tali concetti comporteranno.

"I valori della tabella si avvicinano sempre di più, per cui ci sarà il numero a cui arrivano"

Insegnante: "Secondo voi i valori continueranno a saltellare così? "

Alunno: "Tendono…. a fare così. Tendono ad avvicinarsi a quella che dovrebbe essere la misura."

Queste ultime considerazioni offrono un quadro abbastanza ampio e complesso di cui l'insegnante deve tenere conto.

4. Epistemologia *del concetto*

Come si è detto prima, si potrebbe chiamare *locale* un'epistemologia che invece di rifarsi a un unico quadro teorico di riferimento si avvale, volta a volta, di scelte suggerite dalla necessità di presentare, al meglio, un

([23]) Con A e P indichiamo due studenti, di cui si riporta il dialogo.
([24]) Dunque per l'Alunno 1 il numero esiste e il metodo è inadeguato per trovarlo, ma l'esistenza prevale e si può riferire la risposta ad un contesto platonista.
([25]) L'affermazione 'drastica' dell'Alunno 2 potrebbe indicare una posizione che accetta gli enti matematici solo sulla base di una loro costruzione possibile, dando così fiducia nel processo in qualità di costitutore e garante dell'oggetto. In entrambi i casi (Alunno 1 e Alunno 2) ciò che emerge come peculiare è la fiducia in "qualche cosa".
([26]) Il riferimento è alla successione e al fatto che i termini della successione sono tutti numeri razionali, quindi una sorta di anticipazione del procedimento di bisezione usato per la determinazione di soluzioni approssimate e nel teorema degli zeri di Bolzano. C'è anche un altro aspetto, relativo alla regolarità delle cifre presenti nella rappresentazione decimale dei numeri, emerso anche in un'altra attività ispirata ai paradossi di Zenone. Per tale risultato si veda (Grugnetti *et al*, 2006).

argomento in classe, allo scopo di facilitarne l'apprendimento. Però l'aggettivo *locale* connesso all'epistemologia è già presente nella letteratura. Ad esempio Kusch (2002) parla di norme epistemiche locali intendendo le norme adottate e condivise da una certa comunità storica. Longino (1997, 2000) ribadisce l'idea che locale si riferisca a correnti di pensiero che interagiscono allo scopo di costruire l'obiettività della conoscenza scientifica e fornisce l'esempio di studi biologici sullo stesso argomento che hanno spiegazioni teoriche diverse ed incompatibili. In questi casi fornisce un esempio di giustificazione scientifica basata sulla molteplicità di pareri della comunità scientifica, come una forma di epistemologia (*globale*) ottenuta da epistemologie *locali*,

Per evitare ambiguità, visto che pensiamo al docente che in classe presenta un argomento di matematica, adattando o modificando il suo punto di vista all'esigenza dell'insegnamento, parleremo di epistemologia *dipendente dal concetto*, o più brevemente, di epistemologia *del concetto*. Di fatto si tratta di un esempio di epistemologia *implicita* dell'insegnante, perché, in genere, vissuta in modo non consapevole da parte del docente.

La nostra proposta di lettura epistemologica della attività didattica è sicuramente modesta e limitata, ma potrebbe risultare strumento utile per un'analisi a priori delle difficoltà di insegnamento-apprendimento. Il termine che abbiamo coniato è quello di epistemologia *del concetto*, in contrapposizione ai sistemi epistemologici *globali* che si offrono come ipotesi di ricostruzione della conoscenza matematica nel suo complesso. A sostegno di quanto proponiamo, nelle sezioni seguenti mostriamo esempi tratti da argomenti indicati per il segmento terminale della Scuola Secondaria di secondo grado.

4.1. Professioni di fede

La storia dei fondamenti della matematica mostra suddivisioni tra scuole di pensiero in specie di sette: i pensatori di una corrente (talvolta suddivisi ulteriormente in sotto-correnti) contro tutti gli altri. Queste separazioni nette tra i matematici, di fatto, hanno impedito di adottare un atteggiamento di *cosmopolitismo* (Stoico), in base al quale trarre il buono laddove esso potesse essere trovato. Così colui che avesse scelto un'epistemologia *globale* legata ad un sistema fondazionale, avrebbe fatto una sorta di atto di fede religioso; ed ogni suo cambiamento di opinione avrebbe avuto il connotato di un'apostasia.

Siffatta rigidità è tuttora presente (ad esempio nell'ambito delle ricerche sui fondamenti della probabilità). La maggioranza dei matematici di oggi (matematici platonisti secondo (Bishop, 1967)), non accetta punti di vista diversi, riuscendo, quasi completamente, a confinare approcci alternativi alla matematica in sorte di 'riserve indiane' ([27]).

E pensare che un esempio luminoso di flessibilità ci giunge da Euclide, il quale adegua la sua visone degli oggetti matematici sulla base di un platonismo ingenuo, seguendo poi con scrupolo le linee guida tracciate da Aristotele per descrivere una scienza deduttiva.

Le ricerche in didattica della matematica spesso adottano tale scelta esterna al campo didattico, ma il punto di vista classico potrebbe essere uno dei motivi per cui la matematica è ritenuta rigida e noiosa.

Gli insegnanti cha abbiano ben presente gli aspetti epistemologici, possono presentare, anche senza bisogno di tracciarne l'origine storica, simultaneamente, i differenti approcci allo stesso tema e in base a ciò iniziare a seminare il dubbio (e il pensiero critico) sulla 'certezza' della conoscenza matematica. Diffondere un simile atteggiamento sarebbe salutare per la nostra disciplina (ed importante per la formazione): spesso gli studenti hanno l'impressione che la matematica sia calata dall'alto, da una qualche divinità non sempre benevola, e del tutto indifferente a quelli che credono essere i loro bisogni.

Gli insegnanti in servizio ed in formazione posti di fronte a questa problematica del dubbio, si dichiarano d'accordo sul valore educativo (che trascende il solo contesto matematico), ma esternano una reazione negativa, giustificandola con l'asserto che gli studenti richiedono certezze ([28]). Senza voler interferire con questi aspetti psicologici, osserviamo unicamente due aspetti del problema:

(i) i programmi italiani per la Scuola Secondaria di secondo grado prevedono per gli ultimi anni, riflessioni sulla matematica con aspetti tipicamente epistemologici;

([27]) Famoso il caso di Hilbert che fece di tutto per cacciare Brouwer dal comitato scientifico di una rivista sostenendo che il suo esempio (come matematico) poteva essere dannoso per i giovani.

([28]) Sarebbe interessante capire se sotto questo atteggiamento degli studenti non ci sia anche quello dei loro insegnanti. Sarebbe inoltre importante approfondire il rapporto tra la 'certezza' richiesta e il concetto matematico di *decidibilità*; purtroppo anche in casi concreti, come si mostra in seguito, tale requisito manca.

Un'altra ragione del rifiuto degli insegnanti potrebbe essere la pratica consolidata di insegnare risultati già dimostrati da altri usando un approccio ipotetico-deduttivo. Cambiare questa pratica per i docenti ha sicuramente costi (personali) elevati.

(ii) una conoscenza più approfondita della storia e dell'epistemologia della nostra disciplina potrebbe dare un 'volto umano' alla matematica ed inoltre questa approfondita consapevolezza potrebbe chiarire le ragioni di alcune difficoltà di apprendimento.

Molti concetti matematici, infatti, hanno complessità intrinseche che a loro volta generano difficoltà ed ostacoli alla comprensione; la presenza di proposte epistemologiche simultanee, in competizione tra loro circa gli stessi argomenti, potrebbe essere usata come un criterio di evidenza dell'esistenza di tali difficoltà e forse la possibilità di percorrere vie diverse per le loro soluzioni, realizzando in parte il concetto di epistemologia di Longino (2000).

4.2. Cosa possa intendersi per epistemologia del concetto

I paragrafi precedenti giustificano l'analisi della pratica didattica per metterne in luce gli aspetti più problematici, partendo dai quali è possibile produrre riflessioni coinvolgenti gli aspetti sia educativi sia epistemologici, senza però la presunzione di dare un quadro teorico completo, un'epistemologia *globale*, in grado di spiegare il maggior numero possibile di concetti.

L'approccio che esponiamo è prossimo alla maieutica socratica: partendo da concetti e costruzioni standard, accettate nei curricola scolastici, suggeriamo di dare uno sguardo ai concetti stessi come occasione per presentare quesiti da utilizzare quali punti di partenza per ricerche più approfondite, anche se non sempre rilevanti dal punto di vista della loro 'spendibilità' scolastica immediata. La nostra proposta porta contributi alla decisione tra *filomatica* e *matesofia* ed è coerente con l'idea che la filosofia (e la filosofia della scienza) sia l'arte di porre domande, non quella di fornire risposte.

In tale linea può essere interpretata l'opera di Lakatos, (Lakatos, 1976), specialmente per gli aspetti della teoria della dimostrazione. Il nostro scopo, qui, è di permettere di apprezzare questi aspetti, spesso ignorati.

Un quadro teorico è offerto dal triangolo introdotto da (Shulman, 1986), e ri-presentato in (Tsamir, 2000), i cui vertici sono denotati con SMCK , PCK e CCK:

SMCK, vale a dire la *conoscenza dei contenuti specificati*, nella citazione di Tsamir (2000), è

> "l'accumulo e l'organizzazione della conoscenza nella mente dell'insegnante … L'insegnante non deve soltanto capire che qualcosa è così; deve inoltre comprendere perché è così, su quali basi si fonda tale affermazione, in quali circostanze l'affermazione può essere messa in dubbio o addirittura rifiutata."

Pertanto SMCK

> "richiede un approfondimento della conoscenza dei fatti e dei concetti propri di un certo campo. Richiede la comprensione delle strutture dell'argomento ... l'insieme dei modi in cui la verità o la falsità, la validità o l'invalidità vengono stabilite".

Il secondo vertice, PCK, vale a dire la *conoscenza del contenuto pedagogico*, è correlata con le credenze degli studenti e con gli approcci di insegnamento:

> "la conoscenza del contenuto pedagogico include inoltre una comprensione di ciò che rende l'apprendimento di un determinato argomento semplice o difficoltoso, le concezioni e le preconcezioni di studenti di diverse età ed il background che esse costituiscono per l'apprendimento."

Una tale ricerca di conoscenza e il relativo contenuto pedagogico, gli ostacoli e le pre-concezioni degli studenti devono essere confrontati con il terzo vertice, CCK, cioè la *conoscenza del contenuto del curricolo*, che si riferisce alle competenze nel collegare un argomento con gli altri:

> "la conoscenza curricolare sottintende la capacità degli insegnanti di collegare il contenuto di un dato corso o di una data lezione a questioni ed argomenti simultaneamente trattati in altre discipline...la familiarità con gli argomenti che sono stati trattati e che saranno trattati nella stessa area nei passati e nei seguenti anni scolastici..."

Sono quindi i vertici SMCK e PCK quelli su cui più si sofferma la nostra attenzione in questo scritto.

4.3. Esempi di applicazione dell'epistemologia del concetto

Diverse occasioni per approfondimenti epistemologici di aspetti relativi al concetto di limite e problemi connessi, sono presenti in (Andriani *et. al.*, 2006); per quanto riguarda il concetto di funzione si possono consultare (Grugnetti *et al.*, 2001), (Maffini, 2000), (Maffini, 2003), (Marchini, 2004): si possono leggere le attenzioni epistemologiche colà riportate come esempi di un'epistemologica *del concetto*, per altro non individuata con tale dizione. Mostriamo qui alcune esplicite applicazioni di questo tipo di epistemologia per mettere meglio in luce i problemi sottili connessi con i fondamenti della matematica e l'ambito epistemologico.

4.3.1. La lista dei sogni

Questo esempio è tratto, quasi testualmente, da (Andriani *et al.* 2006) in quanto ci sembra un'adeguata esemplificazione dell'epistemologia *del concetto*. Il problema sottostante è spinoso, anche se trova posto nel curriculum scolastico: l'introduzione dei numeri reali. La storia ci insegna che vari studiosi (Weierstrass, Soschino, Cantor, Dedekind, Peano, Russell, Meray, Grandi e Arzelà, ecc.) hanno mostrato i loro modelli del sistema dei numeri reali a partire da modelli dei sistemi numerici 'precedenti'.

Di fatto le varie proposte si possono ritenere diverse analisi (semantiche) del concetto di numero reale. Un'alternativa ad esse è offerta dalla presentazione assiomatica del sistema dei numeri reali ed anche questa può essere fatta ponendo l'accento alle varie proprietà algebriche, dell'ordine, di completezza, con un'implicita richiesta dell'esistenza di un *modello inteso*, usando un termine della Logica matematica.

Anche qui non mancano le 'sorprese' vista la contemporanea e concorrenziale presenza di varie alternative; la più nota è quella dell'analisi non-standard, ma sono possibili altre presentazioni (quella che richiede un predicato specifico per i numeri naturali, quella nel contesto della matematica alternativa, quella che espunge le definizioni non predicative, ecc.). In generale però, chi o cosa garantisce che tutte queste ed altre possibili introduzioni semantiche siano tutte adeguate ad individuare lo stesso concetto? E quale scegliere tra le presentazioni sintattiche, come la più idonea a fare la Matematica che si desidera?

C'è, sicuramente quella che compare con più frequenza sui libri di testo (universitari), ma altrettanto frequentemente detti testi spendono poche o punte parole per metterne in luce gli aspetti discutibili, quali, ad esempio, l'uso implicito e non segnalato dell'assioma di scelta (che compare a volte sì e a volte no, anche sullo stesso testo). Ma tutti questi problemi (quasi) scompaiono se si adotta in modo sovente non esplicitato che

1. gli enti matematici pre-esistono alla nostra considerazione degli stessi;
2. tali enti sono organizzati nel modo più *semplice* possibile per rendere applicabili alla 'realtà' i procedimenti standard, grazie ad una sorta di benignità della natura che si conforma a siffatte costruzioni della Matematica;
3. tali enti sono causalmente attivi, nel senso che sono loro che si fanno conoscere (probabilmente per farsi apprezzare da noi, nel ruolo di spettatori);
4. se incontriamo delle difficoltà nell'individuazione delle relazioni che intercorrono tra essi, è colpa nostra, colpa delle nostre limitazioni, dato che gli enti sono perfetti ed immutabili, guardano con benevolenza i nostri vagiti infantili per descriverli: gli assiomi, i teoremi e le definizioni (anche se impredicative).

Il lettore può giustamente dissentire da queste assunzioni, anche se sono basate sulle affermazioni di autori noti ed apprezzati. Altre scelte, se seguite coerentemente, mettono in crisi, se non addirittura escludono, molti risultati di Analisi matematica ai quali è difficile rinunciare senza doversi chiedere che cosa mai sia stato fatto finora.

Tuttavia nel curriculum scolastico (e spesso anche nei corsi universitari) sembra che il concetto di numero reale imponga, per motivi di semplicità, di opportunità, di applicabilità, ed altre categorie metafisiche del genere, la precedente lista dei sogni come l'epistemologia cui attenersi.

4.3.2. Un esercizio sul c'è, ma non c'è

Nella scuola italiana è assai ben istituzionalizzato un approccio algoritmico e formale; questo approccio nasconde molti problemi che possono essere poi d'ostacolo alla comprensione dello studente. L'abitudine algoritmica può abbreviare la via per la scoperta di risultati utili nelle applicazioni, ma in questo modo si possono anche creare zone 'grigie' che, a lungo andare, rischiano di allontanare gli studenti dalla matematica.

Il testo seguente può essere trovato sui manuali:

(1) *Calcolare il seguente integrale (generalizzato)*

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

Una prima osservazione: lo studente inizia con la presunzione (o meglio il bisogno) che l'integrale sia calcolabile (in modo effettivo), cioè che ci sia un risultato (ottenibile in tempi finiti); questa presunzione è garantita dal fatto che è stato l'insegnante ad assegnare l'esercizio. Raramente gli studenti mettono in dubbio che l'esercizio, dato come compito, non possa essere svolto in modo effettivo e, tutto sommato, semplice. Una formulazione diversa della consegna potrebbe aiutare gli studenti ad eseguire una verifica preventiva:

determinare se l'integrale esiste e, nel caso, calcolarlo. Ma, anche se la questione viene formulata in questa seconda maniera, potrebbe non essere possibile risolvere il quesito. È da notare che in alcuni casi è proprio l'esistenza del risultato a dare significato ai termini del problema (in un modo ovunque definito e funzionale).

Data una funzione descritta mediante un'espressione analitica che sia 'costruita' con funzioni polinomiali, esponenziali e trigonometriche e le loro funzioni inverse, anche se l'espressione è complicata, nel caso in cui la funzione sia derivabile, la funzione derivata può essere determinata con un procedimento effettivo (in un numero finito di passi, talvolta con una ampia dose di buona volontà). Sfortunatamente nel calcolo integrale ci sono esempi di funzioni con espressione analitica semplice, ma le cui funzioni primitive (di cui si conosce l'esistenza per altri fatti generali) non hanno un'espressione analitica (esprimibile in termini finiti). Tutto ciò è ben noto e può giustificare alcune difficoltà che gli studenti incontrano nel calcolo integrale, ed anche la necessità di metodi per calcolare gli integrali mediante le serie di potenze, viste quest'ultime come strumento per risolvere un problema non risolubile direttamente.

Nel caso del calcolo integrale ci sono alcuni risultati teorici che stabiliscono l'integrabilità di vari tipi di funzioni con opportune proprietà, ma talora il risultato può non essere determinato in modo effettivo (in termini finiti). Non è questo il caso dell'esercizio (1)!

Il calcolo integrale è più difficile di quello delle derivate. Ma esiste una 'misura' di questa difficoltà? La difficoltà è un'opinione personale del risolutore o è una caratteristica intrinseca del concetto di integrale? Questo problema è attribuito a J. Liouville (1809 - 1882). Formulato più chiaramente si tratta della domanda se esistono condizioni necessarie e sufficienti o se è possibile che esistano metodi effettivi per stabilire se una funzione 'elementare' abbia una funzione primitiva 'elementare'.

Per lo più, lo studente cerca un'espressione esplicita di una funzione primitiva e, possibilmente, con un algoritmo esplicito che specifichi una funzione primitiva a partire dalla data funzione integranda.

Questo problema è stato risolto definitivamente da Richardson, (1968) e Risch, (1969 e 1970) (Lolli, 1978): se E è una classe numerabile di funzioni reali, tali che $y = x$, $y = e^x$, $y = \text{sen}\ x$, $y = |x|$, $y = \log 2$, $y = \pi$ e $y = a$, con *a*Î*Q*, appartengono a E e le funzioni ottenute applicando addizione, sottrazione, moltiplicazione e composizione di elementi di E sono ancora elementi di E, inoltre esiste *h*: *R* ¾® *R* tale che *h*ÎE e non esiste una funzione *f*ÎE ed un intervallo reale I tale che $f' = h$ su I, allora il problema dell'integrazione non è decidibile per la classe E, in termini finiti.

La funzione $y = e^{-x^2}$, è composizione delle funzioni con espressione analitica $y = e^x$ e $y = -x^2$, è un elemento di E e può essere scelta come la funzione *h* di cui sopra; ciò permette di concludere che il problema dell'integrazione non è risolubile in termini finiti.

I risultati di Richardson e Risch si ottengono come un corollario del risultato di (Matijasevič, 1970), relativo al decimo problema di Hilbert sulle relazioni diofantee, vale a dire, in termini grossolani, che non esiste un metodo generale per risolvere in *Z* equazioni e sistemi algebrici a coefficienti in *Z*.

In base alle affermazioni: *una funzione è integrabile* e *si può calcolare l'integrale della funzione* si palesano due contenuti concettuali diversi. La prima affermazione sembra più vicina ad un'impostazione platonica della matematica, la seconda affermazione ha un contenuto più pragmatico, secondo il quale l'esistenza è possibile solo se è effettiva (vale a dire ottenibile in termini finiti o mediante un processo decidibile). Questo aspetto chiama in gioco altre filosofie, quelle che asseriscono che la decidibilità è sufficiente, contrapposte a quelle che ritengono esistente solo ciò che lo è con un numero finito di passi.

4.3.3. Altri esempi di c'è, ma non c'è

Pertanto tra *esiste* e *si può trovare* c'è grande differenza. La matematica ha sempre gestito questi problemi fin dall'antichità:

Nella geometria precedente ad Euclide si incontrano i cosiddetti problemi classici, non risolubili mediante riga e compasso (e di cui non si trova menzione negli *Elementi,* per una sorta di censura ideologica). In generale le affermazioni esistenziali di Euclide sono provate con procedimenti costruttivi espliciti. Una (clamorosa) eccezione a questa scelta è il Postulato 5 delle parallele, nella versione originale euclidea ([29]). E la non accettazione di questa esistenza 'ideale' è stata, nei secoli, il motore che ha spinto vari matematici a trovare formulazioni più intuitive, a provare che il quinto postulato era conseguenza degli altri, ed infine a dimostrare l'indipendenza del Postulato 5 dagli altri.

([29]) Questi altri esempi richiederebbero una migliore specificazione. Di fatto, rispetto al problema posto relativamente all'integrazione, i contenuti epistemologici coinvolti sono differenti.

Anche in Algebra si incontra una simile situazione: il cosiddetto *Teorema fondamentale dell'Algebra*, la cui prima formulazione esplicita si attribuisce a Girard (1595 – 1632), fu provato da Gauss (1777 - 1855) nel 1799. Il Teorema fondamentale afferma che ogni equazione algebrica (a coefficienti complessi) ha almeno una soluzione nel campo complesso. Nello stesso anno 1799 Ruffini (1765 - 1822), provava (anche se in modo non completamente soddisfacente) che per un'equazione algebrica generale di quinto grado, non c'è una soluzione per radicali (ottenuti con espressioni razionali dei coefficienti dell'equazione). Solo mediante l'introduzione delle funzioni ellittiche ed iperellittiche, legate all'impossibilità di determinare le primitive di certe funzioni in termini finiti, si potranno fornire soluzioni in termini finiti delle equazioni algebriche di grado 5 e superiore in termini finiti, scaricando quindi il problema algebrico sul caso dell'integrazione.

4.3.4. Soluzione dell'esercizio

L'esercizio (1) non è problematico, ma ci è servito solo come spunto di riflessione. Di solito, gli insegnanti diligenti propongono esercizi che possono essere risolti in termini finiti (e semplici). Ma nel testo ci può essere un errore casuale, o un refuso e ciò può causare problemi agli studenti.

Si fornisce una soluzione seguendo lo 'stile' dello studente: (1) è un integrale definito (in realtà generalizzato, a parte 'dettagli' che di solito, a questo punto del procedimento solutivo, si trascurano). Lo standard (studentesco) consiste nel calcolo dell'integrale indefinito e da questo a quello definito.

L'integrale indefinito è

$$\int xe^{-x}dx$$

per il quale, con la cosiddetta *regola* o *metodo* dell'integrazione per parti, si ottiene:

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \left(-\int e^{-x}dx)\right) = -xe^{-x} - e^{-x} + c\,. \tag{2}$$

Crediamo che molti studenti si riconoscano in questo svolgimento. Lo strumento principale usato, la cosiddetta *regola* o *metodo*, di fatto è un *teorema* che viene dimostrato sotto opportune ipotesi. Nello svolgimento mostrato non c'è traccia dell'analisi delle condizioni date dalle ipotesi del teorema. Si dovrebbe appurare se la funzione integranda di (1) possa essere scritta come il prodotto di due funzioni, e una di queste dovrebbe essere integrabile e l'altra derivabile. Ma lo studente questo lo dà per scontato, fidando nella buona fede dell'insegnante Un discorso a parte merita l'improvvisa 'apparizione' di *c* nell'ultimo membro della catena di uguaglianze.

Esercizi analoghi a (1) sono assegnati solo quando le ipotesi dette sopra sono soddisfatte, ma una funzione potrebbe essere integrabile e ottenuta come prodotto di due funzioni, senza che siano soddisfatte le ipotesi dell'integrazione per parti.

Inoltre la regola è un enunciato i cui 'soggetti' sono funzioni introdotte con quantificazione universale: per ogni funzione *f* e per ogni funzione *g*, ecc.

Per quanto riguarda la presenza della lettera *c*, si rimanda al prossimo paragrafo.

4.4. I teoremi sul calcolo degli integrali

4.4.1. L'esercizio (1)

L'esercizio (1) non è ancora risolto completamente, l'interruzione nel flusso della soluzione, vale a dire il passaggio dall'integrale definito a quello indefinito, è anch'esso da analizzare in quanto viene applicato senza alcuna precauzione dagli studenti, e senza tenere conto che ci sono funzioni integrabili mediante integrazione definita, ma non mediante integrazione indefinita. Questa però sarebbe una vera e propria 'cattiveria' da parte dell'insegnante, ed in base al rapporto fiduciale instaurato in classe, lo studente non ci pensa minimamente.

Alcuni manuali scolastici nascondono completamente il problema introducendo prima l'integrale indefinito e poi chiedendo di svolgere esercizi di integrazione definita, sfruttando il teorema in base al quale un integrale definito si ottiene mediante il calcolo di una qualunque funzione primitiva della funzione integranda sugli estremi di integrazione. Questo approccio rafforza l'idea che tutte le funzioni (che servono per superare i compiti in classe e gli esami) sono continue e che è sufficiente leggere bene la tabella delle derivate al contrario, per sapere svolgere gli esercizi sul calcolo integrale. Si assiste quindi ad una sorta di epistemologia *della semplicità* che ha (solo) connotati scolastici.

L'onnipresenza della continuità porta a risolvere l'esercizio (1) scrivendo

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \left(-\infty e^{-\infty} - e^{-\infty}\right) - \left(-0e^{-0} - e^{-0}\right) = 0 - (-1) = 1$$

In questa scrittura

- è scomparso c, presente in (2);
- $+\infty$ viene visto come un numero reale, con qualche 'strana' proprietà, per esempio, l'opposto di $+\infty$ è $-\infty$, altro 'numero' reale;
- si sfrutta tranquillamente la continuità anche sul 'numero' $+\infty$.

Lo studente potrebbe avere dubbi su come trasformare la scrittura $-\infty e^{-\infty}$, ma qualche suggerimento potrebbe giungergli dalle proprietà degli infinitesimi o dai teoremi sui limiti.

4.4.2. Altri teoremi sul calcolo degli integrali

Un ulteriore esempio ricco di aspetti da approfondire, è quello di integrale indefinito, individuato da un simbolo che richiama da vicino quello di integrale definito. Cioè se f è una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo $[a,b]$ ed ivi integrabile, l'integrale (definito) si denota con $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, ed il risultato, un numero reale, dipende da f, da a e da b; mentre l'integrale indefinito si denota col simbolo $\int f(x)dx$, ammesso che esista, cioè che siano soddisfatte le ipotesi di continuità della funzione integranda nell'intervallo di definizione $[a,b]$. Sembra che nell'integrale indefinito siano 'spariti' gli estremi dell'intervallo di integrazione, che invece sono presenti nel dominio di definizione della funzione f. L'analisi morfologica di questa scrittura suggerisce che il risultato dipenda solo da f. Sarebbe indispensabile una nuova e più esplicita scrittura, ad esempio $\left(i\int_\alpha^\beta\right)f(x)dx$, per denotare esplicitamente che si tratta di un integrale indefinito, ma in cui compare esplicitamente anche il dominio della funzione.

Per chiarire meglio: spesso negli esercizi non si richiede di calcolare l'integrale definito di una funzione (vista come legge o come espressione analitica) su tutto il suo dominio di definizione, ma solo su intervalli (o unioni finite di intervalli) contenuti nel dominio della funzione. Così c'è ancora un punto non chiarito per cosa debba intendersi per l'integrale indefinito $\int xe^{-x}dx$, che viene utilizzato per calcolare $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

Quanto detto prima, che nell'integrale indefinito la funzione porta con sé il proprio dominio ([30]), non è sostenibile in questo caso. Infatti, il dominio di $f(x) = xe^{-x}$ è R, mentre nell'integrale definito compare solo 'metà' di tale dominio. Allora la funzione integranda dell'integrale definito non è quella espressa dalla espressione analitica $f(x) = xe^{-x}$, ma la sua restrizione([31]) a $[0,+\infty[$ e, ad essere precisi, per risolvere il problema mediante l'integrale definito ci sarebbe da scrivere $\left(i\int_0^{+\infty}\right)xe^{-x}dx$ oppure, in modo forse più semplice e corretto, $\int \left(xe^{-x}\right)_{|[0,+\infty[}dx$, denotando esplicitamente con $\left(xe^{-x}\right)_{|[0,+\infty[}$ la restrizione della funzione $f(x) = xe^{-x}$ a $[0,+\infty[$. Per questi ed altri aspetti critici dell'uso delle restrizioni si veda (Marchini, 2004).

Viene voglia di dire che l'espressione analitica di una funzione, che dovrebbe essere una sorta di accessorio utile solo per esplicitare l'aspetto algoritmico della determinazione delle immagini nella procedura di calcolo della funzione *per se*, viene assunta ad essenza stessa della funzione *in se* [32], slegata dalla limitazione del dominio([33]).

([30]) Se parliamo di funzione, come relazione ovunque definita e funzionale ovviamente il dominio è 'dato' con la legge che individua la funzione. In questo caso con dominio indichiamo, com'è d'uso in analisi, il sottoinsieme di ***R*** in cui è definita la relazione da ***R*** ad ***R*** individuata dalla legge assegnata, cioè quello che normalmente (e pericolosamente) viene indicato come 'insieme naturale di definizione' di una funzione individuata mediante una espressione analitica.

([31]) Tutto questo con i conseguenti problemi sulla definizione di integrale definito, visto che l'intervallo non è chiuso; tale chiusura avviene per mezzo del passaggio al limite, il quale a sua volta induce il salto significativo da intervalli chiusi ad un intervallo aperto nel secondo estremo.

[32] Il lettore può stupirsi della mancanza di accento su '*se*', ma abbiamo utilizzato una dicitura latina tradizionale nel linguaggio filosofico. In termini più attuali e forse più noti avremmo potuto riferirci alla cosiddetta *dialettica strumento – oggetto*, il cui valore didattico è stato bene messo in luce da R. Douady (1986)

Ed ancora una volta questa, come altre accentuazioni sull'aspetto algoritmico, rischia di fare credere agli studenti che esistano solo funzioni esprimibili analiticamente e che il calcolo delle funzioni si svolga esclusivamente a livello sintattico; questo a prescindere completamente dagli aspetti semantici connessi alla scelta del dominio di variazione delle indeterminate che compaiono nell'espressione analitica.

Ciò contrasta anche con il faticoso instaurarsi del pensiero strutturale, di cui si sono viste alcune intuizioni in 4.2., pensiero spesso 'schiacciato' dalla predominanza tacita dell'insieme dei numeri reali, come unica 'realtà' con cui confrontarsi.

In generale, la sparizione di parametri (nel caso in esame gli estremi di integrazione), in varie occasioni 'matematiche' sta a segnalare che si compie una generalizzazione sui parametri, cioè si considera una proprietà o una quantità indipendente dai parametri stessi in quanto 'valida' per ogni valore dei parametri. Nel caso dell'integrale indefinito, però non è così: l'intervallo $[a,b]$ è fissato perché è fissata la funzione f. Se si cambiano parametri si ha piuttosto a che fare con un integrale generalizzato, non con un integrale indefinito. L'integrale indefinito è in realtà un insieme, l'insieme delle *funzioni primitive* della funzione f, cioè l'insieme di tutte e sole le funzioni definite in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$ e la cui funzione derivata nell'intervallo $]a,b[$ ([34]) coincide con la data funzione f. In simboli $\int f(x)dx = \left\{ g:[\alpha,\beta] \to \mathbf{R} \;\middle|\; Dg_{|]\alpha,\beta[} = f_{|]\alpha,\beta[} \right\}$. Si tratta quindi di un insieme infinito, e con una cardinalità 'grande', tanto da non poter essere pensato come un insieme descrivibile mediante un'infinità potenziale. Un altro modo, spesso usato, di indicare l'integrale indefinito è dato da $\int f(x)dx + c$, oppure come $\int f(x)dx = g(x) + c$, scrittura 'abominevole' che oscura il fatto che si ha a che fare con un insieme, nel primo caso sommato con un numero, nel secondo identificato con un'unica funzione. Questi tipi di scritture possono essere giustificate solo osservando che per ogni coppia di funzioni reali di variabile reale definite in $[a,b]$, ponendo «due funzioni sono *equivalenti* se hanno la stessa derivata in ogni punto di $]a,b[$», si ottiene una relazione di equivalenza, che molto raramente viene individuata come tale a scuola. L'integrale indefinito è pertanto una particolare classe di equivalenza, rispetto alla relazione detta sopra, e quindi lo si può pensare come il risultato di un'astrazione (almeno per quanto riguarda l'uso dell'astrazione in matematica).

Il fatto che il calcolo degli integrali preceda di molto tempo lo studio delle relazioni di equivalenza e l'accettazione del loro ruolo nella matematica, ha fatto sì che anche nell'insegnamento si continuassero ad usare notazioni vecchie che oscurano, con la forza della tradizione, la natura dei concetti coinvolti. E il fatto di suggerire l'identificazione di una classe di equivalenza con un suo elemento è frutto di quella generale tensione attiva in molta filosofia, a partire dai presocratici, di ricondurre la molteplicità all'unità. Certamente un'unica funzione spaventa assai di meno di un insieme infinito in atto, con cardinalità 'grande', anche se poi la scelta comporta incomprensioni e difficoltà. In queste scelte è attiva una sorta di *horror infiniti*, che ha lunga tradizione filosofica.

Così, anche se oggi gli studenti studiano ed utilizzano consapevolmente in altri contesti le relazioni di equivalenza, si continua a scrivere $\int f(x)dx + c$, simbologia che appare più vicina alle funzioni, che alle classi di equivalenza. Si confonde in tal modo la classe con un rappresentante, suggerendo implicitamente che c sia una *costante… variabile*. Ma anche la scelta di un rappresentante 'privilegiato' è ben noto che ha a che fare con (anzi può essere assunto come formulazione equivalente del)l'assioma di scelta, e così viene implicitamente suggerito di avvalersi di questo principio discutibile e discusso, senza alcuna attenzione critica.

In tale atteggiamento anti-didattico ricadono poi alcune affermazioni che hanno il ruolo di teoremi sul calcolo degli integrali, spesso presentati solo come formule:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx\,;\; \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx\,.$$

Queste formule vanno analizzate assai accuratamente:

- in esse mancano completamente le indicazioni delle quantificazioni universali, che sono di due sorte diverse, una sulle funzioni ed una sui numeri reali;
- esse sembrano utilizzare la somma di due insiemi o il prodotto di un numero reale per un insieme, operazioni almeno 'strane' se non definite in modo corretto.

Questi teoremi provano, come in tante altri occasioni sparse in vari campi della matematica, che il risultato delle operazioni non dipende dal rappresentante scelto per individuare la classe. Ad esempio l'uguaglianza

([33]) Come esempio di difficoltà indotte da queste convinzioni, si possono citare quelle degli allievi quando si propongono i restringimenti dei domini delle funzioni goniometriche per ottenere funzioni biiettive e quindi invertibili.

([34]) Talvolta si considera la coincidenza in $[\alpha,\beta]$, della derivata della primitiva con f intendendo però di considerare la derivata destra della primitiva in α e quella sinistra in β.

$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ intanto andrebbe scritta meglio indicando al primo membro $\int (\lambda f)(x)dx$; inoltre va letta come la richiesta di dimostrazione del fatto che se g è una funzione, arbitrario elemento della classe di equivalenza $\int f(x)dx$, per cui $g \in \int f(x)dx$, allora $(\lambda g) \in \int (\lambda f)(x)dx$. Tali considerazioni sono sicuramente semplici, ma da mettere in luce per la comprensione dello studente, invece di gabellarglieli come il risultato di una strana aritmetica priva di fondamento.

Quindi, le osservazioni precedenti acquistano un senso solo se inserite nel quadro più generale delle relazioni di equivalenza e chiedendosi poi quali, tra esse, abbiano la natura dell'uguaglianza.

Spesso gli studenti, giustamente, non comprendono perché

$$\int (f(x) + g(x))dx + c = \left(\int f(x)dx + c\right) + \left(\int g(x)dx + c\right),$$

introducendo in tal modo una nuova 'aritmetica' di c, stavolta un numero reale, seppure arbitrario, con regole strane, analoga a quella, 'pericolosa', per cui $\infty + \infty = \infty$.

In tutto questo sembra attiva una epistemologia della semplicità (didattica) pronta a sacrificare la chiarezza e la correttezza, trascurando anche gli strumenti che gli allievi hanno disponibili.
Ci sembra anche di poter dire che, malgrado l'integrale indefinito sia presentato prima del definito, la nemesi storica di quest'ultimo si faccia sentire proprio nelle modalità con cui sono presentate le proprietà dell'integrale indefinito. L'evidente incongruenza tra la definizione di integrale indefinito e le scritture utilizzate per indicarne le proprietà dovrebbero suggerire agli insegnanti (ma anche agli autori dei libri di testo: pochi, in effetti, sottolineano questo aspetto) una maggiore cura nella formulazione. Sembra invece che la preoccupazione sia piuttosto rivolta alle analogie con le corrispondenti proprietà dell'integrale definito, il quale non solo ha imposto la rappresentazione semiotica dell'integrale indefinito, ma sembra averne forzato la struttura delle proprietà. La didattica sembra quindi essere succube di una forma di 'condizionamento' del segno.

4.4.3. Ritorno alla (2)

È ora di riprendere la (2)

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \left(-\int e^{-x}dx)\right) = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

I segni di uguaglianza che in essa compaiono sono tutti discutibili, per non dire errati. Il primo membro è un insieme, il secondo un ibrido tra una funzione ed un insieme su cui si opera aritmeticamente, senza alcun pudore, il terzo membro è una funzione. La scrittura corretta sarebbe

$$\left(-xe^{-x} - e^{-x} + c\right) \in \int xe^{-x}dx.$$

5. Conclusione

Gli esempi, che costituiscono i lunghi paragrafi 4.4 e 4.5, mostrano come nella prassi didattica siano attivi contemporaneamente diversi approcci epistemologici, molti dei quali da addebitare alla tradizione scolastica ed ai curricoli che pare abbiano una velocità di trasformazione inferiore a quella dei mutamenti del pensiero scientifico. Sarebbe bello se almeno, presentando i concetti sorti in tempi passati, si riuscisse a ricreare l'atmosfera del pensiero in cui si sono mossi gli studiosi che ci hanno proposto risultati che noi oggi ripresentiamo! Ma questo è volere troppo. Questi esempi hanno lo scopo di suscitare l'attenzione dell'insegnante che

"…non deve soltanto capire che qualcosa è così; deve inoltre comprendere perché è così, su quali basi si fonda tale affermazione, in quali circostanze l'affermazione può essere messa in dubbio o addirittura rifiutata." (Shulman, 1986),

con la speranza che ciò possa contribuire al miglioramento dell'insegnamento/apprendimento.

Abbiamo dato, inoltre, dimostrazione della presenza in atto di concezioni diverse negli allievi della stessa età, concezioni forti che andrebbero sviluppate e legittimate, perché ricche di aspetti concretamente utili nella quotidiana prassi scolastica.

Resta da concludere se il nostro contributo è di *filomatica* o di *matesofia*. Crediamo che la decisione ultima spetti al lettore, perché può essere una questione di punti di vista personali, su quale delle due discipline porre di più l'accento. Ma ci sembra di avere provato, indubitabilmente, che le due discipline, da sole, sono entrambe cieche.

La matematica senza la filosofia rischia di produrre conoscenza senza vedere bene cosa stia facendo, rischiando così di far perdere il senso complessivo delle cose soprattutto per chi le deve imparare([35]); la filosofia ha avuto numerosi agganci **con** ed ispirazioni **da** la matematica, soprattutto nell'ottica di pensare alla matematica come all'esternazione delle nostre strutture mentali con le quali guardiamo e organizziamo il mondo: Aristotele dimostra che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali, mostra come esempio di universale il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due angoli retti, Spinoza scrive *more geometrico*, Cartesio sente l'obbligo di aggiungere al *Discours sur la méthode* un'appendice di Geometria a spiegazione delle sue idee ed infine, ma gli esempi sarebbero tanti, Husserl scrive le sue *Ricerche logiche* sulla base della critica fattagli da Frege al suo testo sui fondamenti dell'Aritmetica.

Un approccio esterno alla matematica da parte della filosofia, rischia di restare in superficie e di comprendere poco le esigenze dei concetti e di chi li deve insegnare o apprendere; e del resto una matematica senza un consapevole "atteggiamento filosofico" rischia di diventare un "gioco" non sempre divertente…

Abbiamo condotto un'analisi di attività scolastiche consuete proprio con l'intento di mostrare che in esse la lente di ingrandimento di carattere filosofico – epistemologico, scopre crepe in cui si nascondono importanti temi culturali. Chiaramente per vedere il mondo microscopico ci vogliono gli occhiali opportuni, così come ci vogliono anche per vedere i massimi sistemi; è necessario quindi che il tema epistemologico venga trattato in modo adeguato anche nelle aule dei dipartimenti di matematica dove ci si occupa della formazione degli insegnanti. E se in quelle sedi non si potrà fare tutto, almeno si dovrebbe cercare di istillare la curiosità per tali argomenti; riteniamo infatti che un futuro insegnante sia, innanzi tutto, spinto a prendere consapevolezza della propria epistemologia e da quella partire non solo con l'obiettivo di approfondirla, ma anche di poter fondare su di essa la conoscenza delle altre, diverse, epistemologie che determinano, insieme, la conoscenza mate-filosofica.

([35]) Si badi bene che questo è altra cosa rispetto alla domanda spesso posta dagli alunni relativa al "cosa serve". La manifestazione macroscopica di questa affermazione risiede soprattutto nella constatazione di molti errori degli studenti imputabili soprattutto al loro muoversi su un piano strettamente sintattico.

Allegato 1

A. Le concezioni della matematica, nella cultura e nell'insegnamento: varie "posizioni"
A.1. Commenta brevemente i seguenti aforismi:
"La matematica è un gioco giocato secondo certe regole semplici con dei segni senza significato sul foglio." (David Hilbert)
"La matematica può essere definita come la materia in cui non sappiamo mai di che cosa parliamo, né se ciò che stiamo dicendo è vero" (Bertrand Russell)

A.2. Leggi le seguenti affermazioni sulla natura della matematica e indica quale condividi maggiormente, motivando brevemente la scelta.
Se nessuna si adatta a ciò che pensi della matematica, forniscine una tua:

1) Platonismo: *Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito dei matematici è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore* (Zeilter, 1990).
2) Formalismo: *La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni dei teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore e non uno scopritore. Per lui la questione dell'esistenza degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizioni.* (idem)
3) Costruttivismo (intuizionismo): *La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi. La questione della costruttibilità è l'interesse predominante e permanente di chi aderisce a questa posizione*. (idem)
4) Fallibilismo: *La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile e la formalizzazione non assolve il suo ruolo di garanzia, ma piuttosto intralcia lo sviluppo della conoscenza. Inoltre lo sviluppo della matematica è parallelo a quello delle scienze naturali; in matematica come nelle scienze naturali l'accento non è nella trasmissione della verità da premesse vere a conclusioni, ma nella retrotrasmissione di falsità da conclusioni falsificate (i falsificatori) a premesse ipotetiche. A parte contraddizioni formali come* $p \wedge \neg p$*, i potenziali falsificatori di una teoria sono i teoremi informali della preesistente (assunta) teoria informale. Nella visione fallibilista la matematica informale è di importanza cruciale, perché come prodotto è la sorgente di tutta la matematica formale*. (Ferrari, 1995)
5) Umanistica: *"Quello che cerco di dimostrare è che, da un punto di vista filosofico, la matematica deve essere considerata come un'attività umana, un fenomeno sociale che fa parte della cultura umana. E, in quanto tale, evoluta storicamente e intelligibile solo in un contesto sociale. Questa concezione è quella che chiamo la concezione umanistica"* (R. Hersh, Cos'è davvero la Matematica)

B. Rispondi, in base alla tua esperienza e alla tua concezione della matematica, alle seguenti domande:
- Perché insegnare matematica?
- Cos'è la matematica e cosa studia?
- Quale differenza tra matematica e fisica?

Allegato 2 L'ellisse e la sua equazione

Come sai, fissati due punti F_1 e F_2 distinti (detti fuochi) ed un numero reale positivo *a*, l'ellisse è definita come il luogo dei punti P del piano tali che $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.
Ovviamente affinché l'ellisse esista 2*a* deve essere maggiore della distanza tra i fuochi (detta *distanza focale*) e che indicheremo con 2*c*.
Come costruire l'ellisse con Cabri?
Dobbiamo fissare una costante *a* (la somma delle distanze di un punto dell'ellisse dai due fuochi) e i due fuochi.
Fissiamo innanzi tutto un segmento i cui estremi saranno i due fuochi. Consideriamo poi una circonferenza di centro uno dei due fuochi il cui raggio abbia misura 2*a* (con *a* maggiore della semidistanza focale); sia inoltre K un punto della circonferenza (Fig. 1). Il punto P che individuerà il luogo potremmo prenderlo appartenente al segmento [F_1K]; ma come? Tracciando l'asse del segmento [F_2K] e intersecandolo con [F_1K] otteniamo un punto P tale che [PF_2]≅[PK] e quindi la somma delle sue distanze da F_1 e F_2 è uguale alla misura del raggio della circonferenza (Fig. 2). Al variare di K sulla circonferenza, P descriverà l'ellisse. Per visualizzare la curva ottenuta possiamo utilizzare il comando Luogo del menu COSTRUISCI la cui sintassi richiede di indicare il punto che descrive il luogo (P) e successivamente il punto che varia (K) (Fig. 3).

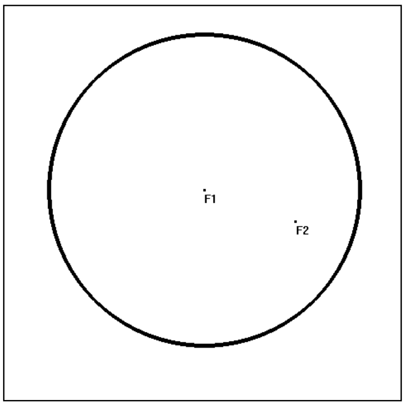

Fig. 1

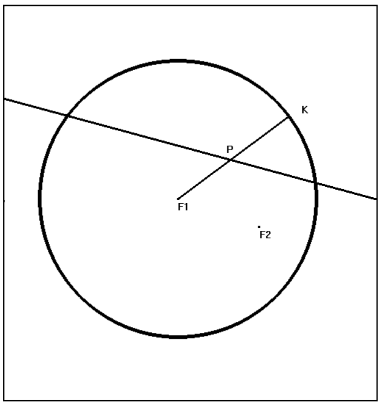

Fig. 2

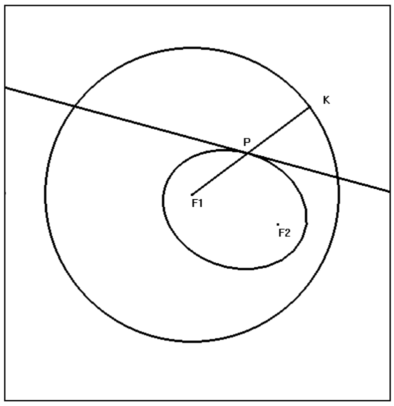

Fig. 3

A questo punto il nostro scopo è stabilire le caratteristiche dell'equazione dell'ellisse rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (monometrico). Prima di procedere, nascondiamo col comando NASCONDI (menu DISEGNA) gli enti che sono serviti per la costruzione (circonferenza, raggio, asse) (Fig. 4). Per trovare l'equazione dell'ellisse dobbiamo prima di tutto fissare un sistema di riferimento cartesiano rispetto al quale trovarla. Prima di fare ciò, troviamo col comando Punto Medio (menu COSTRUISCI) il punto medio M del segmento [F_1F_2] (potrà essere utile…). Col comando Mostra gli assi (menu DISEGNA) evidenziamo il sistema di riferimento e con il comando Coordinate ed equazioni (menu MISURA) troviamo l'equazione dell'ellisse e le coordinate dei punti F_1 , F_2 e di M (Fig. 5). Per una maggiore chiarezza, ti conviene spostare col puntatore l'equazione e le coordinate dei punti dalla figura in un'altra zona del piano in modo che non disturbino.

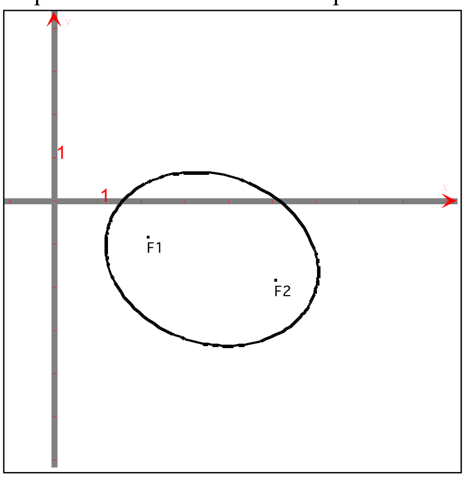

Fig. 4

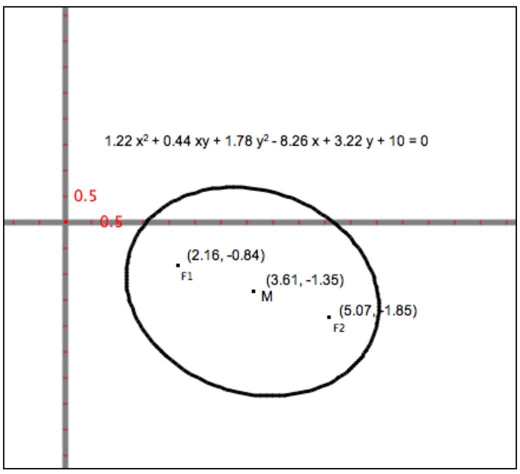

Fig. 5

Come sai dalle altre coniche studiate, il sistema di riferimento determina l'equazione della curva. Per comodità, anziché spostare il sistema di riferimento, sposta il segmento [F_1F_2] (e quindi dal punto di vista metrico è rimasto

tutto invariato: distanza focale e costante 2*a*). Dal punto di vista dell'ellisse, è come se avessi variato la posizione del sistema di riferimento: l'equazione e le coordinate dei punti, naturalmente, cambiano.
Consegna: spostando nel piano il segmento [F_1F_2]cerca di trovare la posizione per l'ellisse (rispetto al sistema di riferimento) affinché l'equazione corrispondente sia "la più bella".
Che cosa intendi per "più bella"? A quali conclusioni sei giunto?

Bibliografia

Andriani M.F., Dallanoce S., Falcade R., Foglia S., Gregori S., Grugnetti L., Maffini A., Marchini C., Rizza A. & Vannucci V. (2006). *Oltre ogni limite – Percorsi didattici per insegnanti spericolati*. Bologna: Pitagora Editrice.

Armella L.M. (1999). Epistemologia ed educazione matematica. *La matematica e la sua didattica*, 3, 271 – 290.

Bishop, E. (1967). *Foundations of constructive Analysis*, New York: Mac Graw-Hill.

Borga, M. & Palladino, D. (1997). *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*. Brescia: Editrice La Scuola.

Cannizzaro L., Pesci A. & Robutti O. (Eds.). (2004). *Research and Teacher Training in Mathematics Education in Italy: 2000 – 2003*. Milano: Ghisetti & Corvi Editori.

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen : mathematischen und philosophischen Inhalts mit erlauternden Anmerkungen sowie mit Erganzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind / herausgegeben von Ernst Zermelo ; nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel*. Berlin: Springer

Creath, R. & Maienschein, J. (2000). *Biology and Epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Dahaene S., 2000, *Il pallino della Matematica*, Milano: Mondadori.

Douady R., (1986) Jeu de Cadres et Dialectique Outil-objet, *Recherche en didactique des matématiques*, Vol. 7/2, 5 – 31.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Ferrari P. L., 1995: Constructivism, education and philosophy of mathematics. *History and epistemology in mathematics education. First European summer university proceedings* – Montpellier, IREM de Montpellier 1993.

Grugnetti L., Maffini A. & Marchini C. (2001). Le concept de fonction dans l'école italienne; usage de l'épistemologie et de l'histoire des mathématiques pour en clarifier le sens. In Radelet de-la-Grave, P. (Ed.) *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathèmatique*. *Proc. Third european summer university* (Louvain la Neuve & Leuven - Belgium), 1999, Vol. II, 421 -443.

Grugnetti L, Maffini A., Marchini C. & Groupe Zeroallazero. (2006). Activités didactiques à caractère vertical pour la construction du concept de limite. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. vol. 11, pp. 229-250.

Hersh, R. (2000). *Cos'è davvero la Matematica*, Milano: Baldini & Castoldi.

Kusch, M. (2002). *Knowledge by Agreement: the Programme of Communitarian Epistemology*. Oxford: Oxford University Press.

Iori M. (2007a). Epistemologia dell'insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale (Parte I: Quadro teorico e rassegna di alcuni risultati di ricerca). *La matematica e la sua didattica*, n. 2, 197-220.

Iori M. (2007b). Epistemologia dell'insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale (Parte II: Analisi risultati di ricerca. Domande di ricerca e ipotesi di risposta). *La matematica e la sua didattica*, n. 3, 303-326.

Iori M. (2007c). Epistemologia dell'insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale (Parte III: Metodologia e risposte alle domande di ricerca D1-D4). *La matematica e la sua didattica*, n. 4, 501-523.

Iori M. (2008). Epistemologia dell'insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale (Parte IV: risposte alle domande di ricerca D5-D9 e conclusioni). *La matematica e la sua didattica*, n. 1, 73-121.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press.

Lolli G. (1978). *Lezioni di logica matematica*, Torino: Boringhieri Editore.

Longino, H.E. (1997). Feminist Epistemology as a Local Epistemology. *Proceedings of the Aristotelian Society Supplement*, Vol. 71, Issue 1, 19 – 36.

Longino. H.E. (2000). Towards an Epistemology for Biological Pluralism. In Creath & Maienschein (2000), 261 – 286.

Maffini A. (2000). 'Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria. *Riv. Mat. Univ. Parma* (6) 3*, 91 – 122.

Maffini A. (2002). Un laboratorio didattico sul tema "Infinito". *Prospettiva EP* – Anno XXV n. 4, Ottobre-Dicembre 2002 , pag. 9-22.

Maffini A. (2003). Continuità e discontinuità: un'attività con insegnanti in formazione. *L'educazione Matematica*, Serie VII, Vol. I, n. 1, 29 – 46.

Marchini, C. (2004). Alcune riflessioni didattiche sul concetto di funzione. *Sfida* Vol. V, XVIII, 27 – 39.

Marchini C. (2008). Le diverse culture degli alunni di 5 - 7 anni sullo spazio (e sull'infinito). *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*. vol. 31A n.2, pp. 159-176.
Matijasevič, Yu. (1970). Solution of the tenth problem of Hilbert. *Mat. Lapok,* 21, 83-87.
Pezzi, F. (2002). Cornicette, bottoni e "infinito", *L'educazione Matematica,* serie VI, 4, 61 - 64.
Platone (1991) *Tutti gli scritti,* Reale G. (a cura di) Milano: Rusconi.
Richardson, D. (1968). Some Undecidable Problems Involving Elementary Functions of a Real Variable, *The Journal of Symbolic Logic*, **33**, 514 – 520**.**
Risch, R.H. (1969). The problem of Integration in Finite terms. *Trans. Amer. Math. Soc*., **139**, 167 – 189.
Risch, R.H. (1970). The Solution of the Problem of Integration in Finite Terms. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**, 605 – 608.
Serres M. (1994). *Le origini della geometria*. Milano: Feltrinelli.
Shulman, L.S. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, February, 4 – 14.
Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.
Stellica, A. (1994). La matematica nel Menone di Platone. In Sidoni G. (Ed.) *Filosofia e Matematica*, Milano: Edizioni dell'Arco.
Toth I. (1998). *Lo schiavo di Menone*. Milano: Vita e Pensiero.
Tsamir, P. (2000). La costruzione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*, n. 2, 167 - 207.
Vighi P. (2006). "Measurement" in a squared paper. In M. Bosch (Ed.) *Proceedings CERME4*, 777 – 785.
Zeilter H. (1990). Axiomatics of geometry in school and in science. *For the learning of mathematics*, v.10, n.2, 17 – 24.