

LA VISUALIZZAZIONE SPAZIALE ... DIMENTICATA³⁶**Roberto Battisti,****sezione di Riva del Garda, in nome del Gruppo geometria solida³⁷****Motivazione della ricerca**

Per visualizzazione spaziale si intende fare riferimento, d'accordo con la definizione che ne dà Vinicio Villani, a quell'abilità mentale di immaginare spazialmente una figura in configurazioni non statiche. I dati di questa ricerca provengono dalla scuola primaria e secondaria di primo grado italiana, per cui anche i risultati ipotizzati si riferiscono alla stessa.

In un articolo del 1987, Villani, ipotizzava che questo processo di costruzione del concetto di "visualizzazione spaziale" potesse avvenire in maniera non corretta se c'è "conflittualità tra immagini mentali e concetti geometrici" e sottolineava come questo possa accadere quando "la visione mentale" si fonda su un numero limitato di esperienze proposte secondo modelli statici e ripetitivi, producendo così una visione distorta della realtà, che conduce facilmente a stereotipi, che poi risulta difficile rimuovere. Per cercare di risolvere o quanto meno di minimizzare questa situazione invitava gli insegnanti a rovesciare l'approccio tradizionale alla geometria dello spazio (breve tempo dedicato all'osservazione degli oggetti in 3D per poi passare velocemente agli elementi fondamentali: punto, retta, piano, angolo; questo percorso risulta una forzatura per la capacità di astrazione richiesta ad allievi di 11 anni, immersi in un mondo a tre dimensioni) e a lavorare fin dai primi anni su esperienze spaziali (es. costruire un plastico della scuola, del quartiere ...³⁸) che permettano il continuo passaggio dal tridimensionale al bidimensionale e viceversa in modo da costruire "le immagini mentali legate ai concetti geometrici". In questo modo risulta più semplice passare dagli oggetti reali alle forme, che possono raggruppare diversi oggetti e vivere nella mente come astrazione degli oggetti.

C'è inoltre da sottolineare come quest'argomento sia poco presente nei curricoli della scuola italiana.

- Scuola primaria (**Fioroni 2007**) Cl. II e III: principali figure del piano e dello spazio (OSA obiettivi specifici di apprendimento: costruire disegnare e descrivere modelli materiali di alcune figure geometriche del piano e dello spazio)

- **PSP 2009, Piani di studio provinciali trentini:** alla fine della scuola, esplorare, descrivere e rappresentare lo spazio;

- Scuola secondaria (**Fioroni**) Cl III: calcolo volumi, aree (OSA visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e viceversa);

- **PSP:** usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi, anche in ambienti concreti.

A distanza di parecchi anni dalla pubblicazione dell'articolo citato si è voluto analizzare se la situazione descritta è cambiata o meno; questo ha rappresentato per il gruppo il punto di partenza e la motivazione della ricerca, quindi ci siamo posti queste domande:

- com'è trattata oggi nella scuola di base italiana la visualizzazione spaziale?

- esistono differenze significative fra i due ordini di scuola?

- man mano che i ragazzi crescono, aumentano le loro prestazioni riguardo a quest'abilità, per cui si può dire che c'è in atto la costruzione di questo concetto?

Il gruppo è partito dalla premessa che analizzando accuratamente i protocolli dei ragazzi, mettendo in evidenza sia gli errori più frequenti e significativi sia le tecniche e gli strumenti usati sia possibile rispondere ai quesiti posti sopra e formulare alcune ipotesi sugli ostacoli e difficoltà incontrate dagli allievi.

³⁶ Testo della presentazione del Gruppo Géometria solida all'incontro di Besançon, 29-31 ottobre 2010.

³⁷ Roberto Battisti, Michela Mattei, Giuseppe Raffaelli, Ester Bonetti, Rita Orsola D'Agata, Irene Serpieri, Mari Cutrera, Carlo Marchini, Daniela Blanchet, Lucia Fazzino, Rosa Santori, Thierry Dias, Sebastien Dessertine.

³⁸ così la geometria entra subito come facce piane, come sviluppi; i problemi di scala sono risolti in modo impreciso, ma la disposizione e la forma vengono rispettate; si acquisiscono esperienze visive passando da 3D a 2D e viceversa, gli allievi devono parlare di ciò che fanno, confrontano le forme che ottengono, le disegnano, descrivono le proprietà e così facendo si costruiscono "le immagini mentali".

Scelta dei problemi

Inizialmente abbiamo scelto due problemi per le categorie della scuola primaria e due per quelle della scuola secondaria di primo grado, che trattassero lo stesso ambito concettuale, ovvero il passaggio dalle 2 alle 3 dimensioni e viceversa:

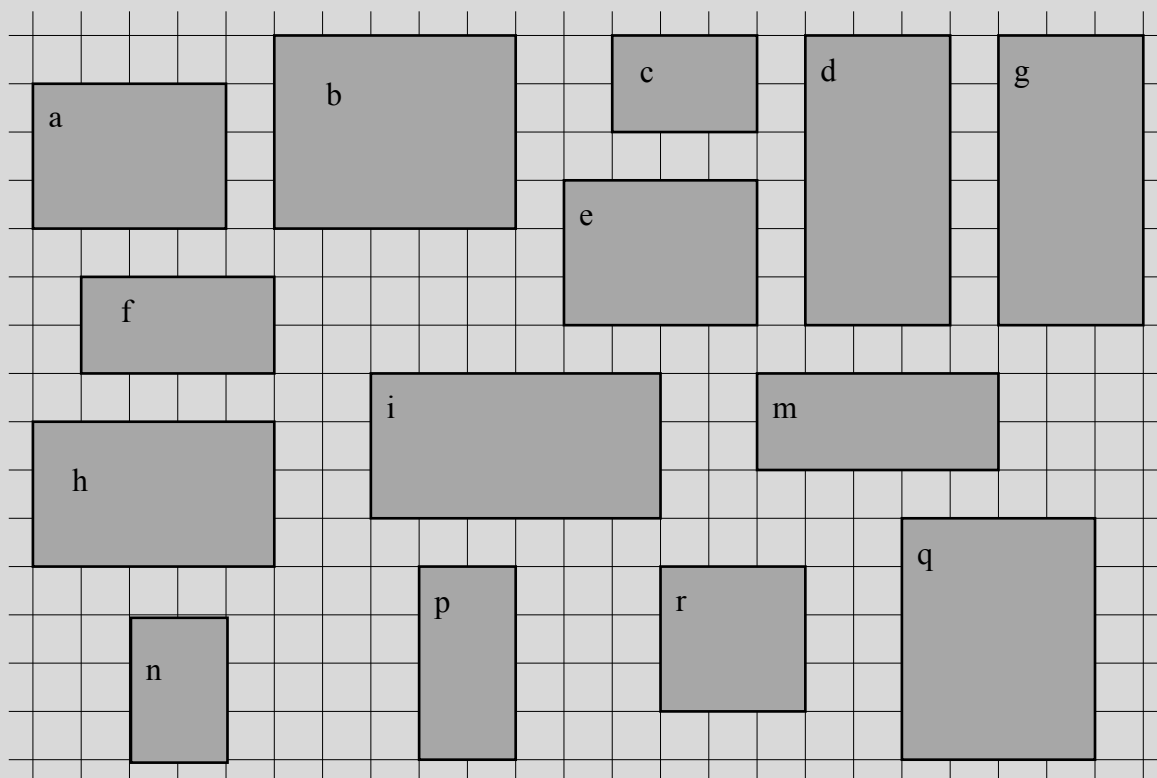
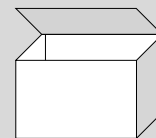
- A. **Scatoline** Cat. 3,4,5. I° prova 17 RMT
 - B. **Torri bicolori** Cat. 3,4,5 I° prova 16 RMT
 - C. **Sviluppi di una piramide** Cat. 6,7,8 I° prova 17 RMT
 - D. **La scatola di cubi** Cat. 6,7 II° prova 16 RMT
- Poi nel corso della ricerca per avere altre indicazioni utili abbiamo analizzato altri 3 problemi:
- E. **Scatola da ricoprire** Cat. 3,4,5 I° prova 18 RMT
 - F. **Sviluppi di un prisma** Cat. 8,9,10 I° prova 18 RMT
 - G. **Il cubo** Cat. 7,8,9,10 II° prova 18 RMT

Analisi problema A

Scatoline (Cat. 3, 4, 5)

Franco ha dei cartoncini che unisce con dello scotch per ottenere delle scatoline tipo questa:

Ogni cartoncino è una faccia della scatolina. Franco li utilizza così come sono, senza tagliarne via dei pezzi e senza piegarli. Ha già costruito parecchie scatoline, ma gli restano ancora i cartoncini che vedete in basso:



**Quante scatoline può ancora fare con i cartoncini che gli restano?
Dite quali sono i cartoncini che gli serviranno e come avete fatto a trovarli.**

I criteri dell'attribuzione dei punteggi, elaborati all'atto dell'analisi a priori erano i seguenti:

- 4 *La scatola correttamente ricostruita o individuata (a, c, e, f, n, p), con l'affermazione che con gli altri rettangoli non è possibile formare un'altra scatola e una spiegazione completa in cui si faccia riferimento alla lunghezza dei lati ed all'uguaglianza dei rettangoli*
- 3 *La scatola correttamente ricostruita o individuata e l'affermazione dell'unicità con spiegazione incompleta o poco chiara oppure la scatola correttamente ricostruita o individuata con spiegazione, ma senza accenno all'unicità*
- 2 *La scatola ricostruita o individuata correttamente, senza alcuna spiegazione*

1 Un inizio di ragionamento in cui si abbinano i rettangoli uguali, ma non li si sa poi alternare correttamente.

0 Incomprensione del problema

Il campione analizzato è composto da 600 protocolli, all'incirca 200 per ogni categoria provenienti dalle sezioni di Aosta, Milano, Parma, Siena, Rozzano e Riva del Garda;

Valore medio, parte da 0,79 (Cat. 3) a 1,02 (Cat. 4) a 1,47 (Cat. 5)

Successi (punteggio 4 e 3): la media delle 3 categorie è del 30%

Errori più comuni:

- scambiano il parallelepipedo per il rettangolo
- non conoscono quante facce ha il parallelepipedo (7,8,9)
- parlano di una scatola senza coperchio o senza fondo, quindi con 5 facce
- nel costruire la scatola non tengono conto che i cartoncini devono essere uguali 2 a 2 e che le loro lunghezze devono combaciare;
- 15% non risponde

Strumenti e tecniche usate

- il 30% rappresenta la scatola con uno sviluppo in piano (80% in modo corretto)
- il 15% presenta la scatola con un disegno in 3 dimensioni
- il 40% si basa sull'immaginazione per rispondere
- le 3 categorie usano gli stessi strumenti anche con la stessa frequenza

Analisi problema B

Torri bicolori (Cat. 3, 4, 5)

Robin possiede una scatola che contiene dei cubi grigi e dei cubi bianchi.

Costruisce parecchie torri rispettando il seguente modello:

Prima torre: 1 cubo grigio



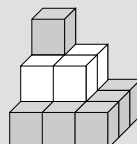
Seconda torre:

5 cubi: 1 grigio e 4 bianchi



Terza torre:

14 cubi: 10 grigi e 4 bianchi



Robin continua a costruire delle torri cambiando colore ad ogni piano.

Quanti cubi di ogni colore utilizzerà Robin per costruire, secondo questo modello, la sesta torre?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

I criteri dell'attribuzione dei punteggi, elaborati all'atto dell'analisi a priori erano i seguenti:

- 4 Risposta corretta (35 grigi e 56 bianchi) con spiegazione
- 3 Risposta corretta (35 grigi e 56 bianchi) senza spiegazione o con spiegazione insufficiente
- 2 Procedimento corretto, ma con risposta errata dovuta a un solo errore nel conteggio o nel calcolo o procedimento corretto, ma, come risposta, il numero totale dei cubi (91) senza distinzione dei colori
- 1 Soltanto il conteggio dei cubi visibili (15 grigi e 21 bianchi)
- 0 Incomprensione del problema

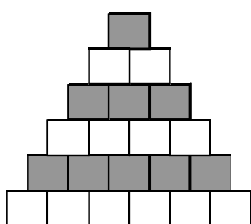
Campione: 500 protocolli circa distribuiti quasi equamente fra le 3 categorie;

Valore medio: 0,51 (Cat. 3); 1,06 (Cat. 4); 1,91 (Cat. 5)

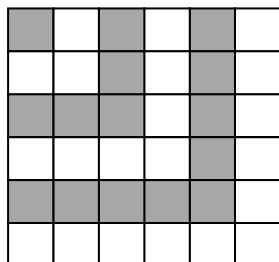
Successi (punteggio 4 e 3) 30% come media delle 3 categorie

Errori più comuni:

- calcolano 20 cubi ($12g+8b$) sommando solo quelli delle prime tre torri dell'enunciato
- disegnano le torri come quadrati e trovano 21 in totale ($9g+12b$)



- calcolano 36 cubetti (15g+21b) che corrispondono al numero di cubi della sesta torre vista in piano oppure disegnano la torre in 3 dimensioni ma contano solo i cubi che vedono



- il 3% non risponde
- Strumenti e tecniche usate*
- il 20% utilizza lo sviluppo in piano (solo il 40% corretto)
- il 14% utilizza il disegno in 3 dimensioni, corretto
- il 18% soluzioni aritmetiche
- il 45% non evidenzia la strategia usata, ma fornisce solo la risposta

Analisi problema C

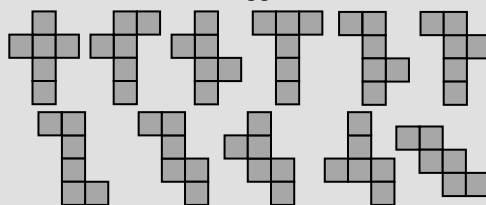
Sviluppo di una piramide (Cat. 6, 7, 8)

La settimana scorsa, gli allievi della classe di Antonio hanno cercato tutti gli sviluppi di un cubo. Ne hanno trovati 11, tutti diversi (non è possibile sovrapporli esattamente spostandoli o ribaltandoli) e hanno verificato che non ce ne sono altri (come nelle figure qui a fianco).

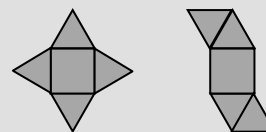
Oggi, Antonio e i suoi compagni devono trovare tutti gli sviluppi di una piramide regolare a base quadrata le cui quattro facce laterali sono triangoli equilateri i cui lati misurano 2 cm.

Ne hanno già trovati due, ma pensano che ce ne siano altri.

Gli 11 sviluppi del cubo:



I due sviluppi della piramide già trovati:



Quanti sviluppi diversi, in tutto, esistono per questa piramide? Disegnateli tutti, con i lati di 2 cm.

I criteri dell'attribuzione dei punteggi, elaborati all'atto dell'analisi a priori erano i seguenti:

- 4 Risposta corretta: 8 sviluppi differenti, con gli 8 disegni (non si esige una grande precisione, ma la distinzione chiara del quadrato, dei quattro triangoli equilateri e delle loro posizioni rispettive)
- 3 Risposta corretta: 8 sviluppi differenti, con disegni di sei sviluppi non presenti negli esempi (senza ripetizioni) oppure risposta «7 o 9 sviluppi differenti» (dovuti a una dimenticanza o ad una ripetizione) con i disegni corrispondenti (con o senza gli esempi) chiari
- 2 Risposta «5 o 6 o 10 o 11 sviluppi differenti» (dovuti a due dimenticanze o a due ripetizioni) con i disegni corrispondenti chiari oppure «8 sviluppi differenti» ma con disegni molto imprecisi o facce non contigue

- 1 Da uno a quattro sviluppi, differenti dagli esempi
0 Incomprensione del problema

Campione: circa 650 protocolli distribuiti abbastanza equamente fra le 3 categorie;

Valore medio: 0,77 (Cat. 6); 0,83 (Cat. 7); 0,97 (Cat. 8)

Successi (punteggio 4 e 3) media delle 3 categorie 13%

Errori più comuni:

- uniscono facce non contigue, ma che combaciano per un punto
- utilizzano facce che si sovrappongono per rotazione o traslazione
- usano triangoli isosceli o rettangoli invece che equilateri
- il 10% non risponde (dato comune alle 3 categorie)

Strumenti e tecniche usate

- il 75% usa subito e solo il disegno
- il 15% ritaglia i pezzi, li accosta e se formano la piramide, la disegna.

Analisi problema D

La scatola di cubi (Cat. 6, 7)

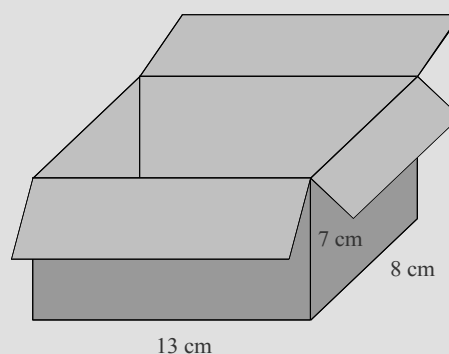
Francesco ha una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo di dimensioni interne 13 cm, 8 cm e 7 cm.

Egli dispone di molti cubi di legno, alcuni con lo spigolo di 2 cm, altri di 1 cm.

Francesco vuole riempire completamente la scatola con il minimo numero possibile di cubi.

Quanti cubi di ciascun tipo deve utilizzare?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.



I criteri dell'attribuzione dei punteggi, elaborati all'atto dell'analisi a priori erano i seguenti:

4 Risposta corretta (72 cubi di lato 2 cm; 152 cubi di lato 1 cm) con spiegazione chiara

3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara;

oppure, procedimento corretto con spiegazione chiara, ma con errori di calcolo (la risposta 160 per il numero dei cubetti piccoli è da considerare come errore di ragionamento e non come errore di calcolo)

2 Risposta corretta per il numero di un solo tipo di cubetti con spiegazione chiara e risposta errata per l'altro

1 Trovato correttamente uno solo dei due numeri senza spiegazione

0 Incomprensione del problema o risposta « 91+0 »

Campione: 250 protocolli provenienti da Parma e Riva del Garda

Valore medio: 0,5 (Cat. 6); 0,8 (Cat. 7)

Successi (punteggio 4 e 3) 11% media delle 2 categorie

Errori più comuni

- calcolano 128 cubi di lato 1 cm (104 ultimo piano + 24 dei 3 piani sottostanti invece che $16 \times 3 = 48$, confusione tra area e volume)
- soluzioni aritmetiche, trovano 91 da $728:8=91$, dividendo il volume totale della scatola per il volume di un cubo di lato 2 cm, senza rendersi conto che 2 misure della scatola sono rappresentate da un numero dispari
- scambiano i cubi per quadrati, l'area con il volume
- ritengono che il volume di 728 cubi di lato 1 cm sia equivalente a quello di 364 cubi di lato 2 cm
- ritengono che il volume di un cubo di lato 1 sia $\frac{1}{4}$ del volume di un cubo di lato 2, confronto fatto in piano fra 2 quadrati, scambio fra 2 e 3 dimensioni
- 10% non risponde

Strumenti e tecniche usate

- il 32% usa il disegno in piano visto dall'alto
- il 3% usa il disegno in 3 dimensioni, disegnando i cubi interni piano per piano
- il 45% fornisce soluzioni aritmetiche senza disegni

Questo problema è stato ritenuto dal gruppo particolarmente interessante, visti i risultati ottenuti, per cui si è pensato di utilizzarlo anche in altri contesti; infatti l'abbiamo assegnato a livello individuale e anche alla categoria 8, cambiando quindi i parametri didattici; ecco i risultati:

Campione: 258 protocolli, assegnati a categoria 6, 7 e anche 8 in misura quasi uguale alle altre 2 categorie,

Valore medio: 0,5 (Cat. 6); 0,8 (Cat. 7); 0,8 (Cat. 8)

Successi (punteggio 4 e 3) 10% in media fra le 3 categorie

Errori più comuni

- il 55% scambio fra le 2 e le 3 dimensioni, area e volume
- il 10% calcola di un solo tipo di cubo
- il 15% errori di calcolo
- il 24% non risponde

Strumenti e tecniche usate

- il 50% soluzioni aritmetiche senza disegni
- il 45% soluzione aritmetica con un disegno in piano
- solo il 5% usa un disegno in 3 dimensioni

Confrontando i risultati ottenuti dai 2 gruppi si vede che sono molto simili se non addirittura uguali anche quelli nuovi della categoria 8, sia per la tipologia degli errori emersi sia per gli strumenti e le tecniche usati; solo un dato è molto diverso, ed è quello che si riferisce al maggior abbandono del problema da parte dei ragazzi a livello individuale, infatti mentre il dato del rally è il 10% non risponde (fisiologico), qua diventa il 24%, quindi raddoppia.

Indicazioni emerse: i risultati

Titolo	N° elaborati	Cat. 3	Cat. 4	Cat. 5	Media
Scatoline	568	0,79	1,02	1,47	1,09
Torri bicolori	495	0,51	1,06	1,95	1,16
		Cat. 6	Cat. 7	Cat. 8	Media
Piramide	648	0,77	0,83	0,97	0,86
Scatola cubi	250 +258	0,5	0,79		0,64

Osservando i punteggi ottenuti nei 4 problemi come si vede dalla tabella, possiamo dire che nella scuola primaria c'è un incremento notevole passando dalla categoria 3 alla 4 e poi alla 5, il valore raddoppia e a volte triplica; questo fatto potrebbe far pensare che aumentando il numero di esperienze fatte si migliorino anche le abilità richieste. La stessa situazione non si ripete nella scuola secondaria, qui non è presente nessun incremento passando dalla categoria 6 alla 8; inoltre i valori medi dei punteggi totalizzati dalla scuola secondaria sono sempre inferiori e anche di molto, 30%-40%, rispetto a quelli ottenuti dalla scuola primaria.

Ecco una prima risposta all'ipotesi iniziale sul percorso scolastico, sulla costruzione di questo concetto e sulle differenze fra i due ordini di scuola.

Indicazioni emerse: gli errori

Dall'analisi degli errori più comuni emerge che esiste un significativo conflitto fra immagini mentali e concetti geometrici, là dove si richiede di cambiare registro per passare dal piano allo spazio (scambio fra le 2 e le 3 dimensioni) e questo si nota soprattutto nel linguaggio utilizzato sia nella scuola primaria sia nella scuola secondaria:

- Scatoline, scambio dei termini rettangolo e parallelepipedo
 - Torri bicolori, scambio dei termini quadrati e cubi, area e volume
 - Scatola di cubi, scambio dei termini quadrati e cubi, area e volume
- Spesso manca proprio del tutto l'abilità di vedere spazialmente, di visualizzare figure tridimensionali:
- Scatoline, non conoscono le caratteristiche del parallelepipedo (indicano 7, 8, 9 facce),
 - Torri bicolori, non vedono i cubi nascosti,
 - Sviluppo piramide, non riconoscono le simmetrie, parlano di 30-40 sviluppi, non vedono le facce che si sovrappongono per rotazione o per traslazione.

Ecco un'altra risposta all'ipotesi iniziale, se esiste una costruzione di quest'abilità all'interno del percorso scolastico (sembra proprio di no!!!!).

Indicazioni emerse: gli strumenti

Dall'analisi degli strumenti padroneggiati ed usati per mettere in atto le strategie di soluzione si nota che:

- nella scuola primaria il 30% usa la rappresentazione grafica sul piano e solo il 15% usa il disegno a 3 dimensioni e si privilegia sempre la manualità.
- nella scuola secondaria si preferisce usare il disegno al posto della costruzione e della manipolazione degli oggetti geometrici (Piramide, 75% solo disegno, 15% ritaglio); disegno sul piano per il 15% contro il 3% che usa il disegno in 3D e inoltre si tende a privilegiare le soluzioni di tipo aritmetico, se possibile (come se ci si fidasse soprattutto di "quella matematica").

Alla luce di questi dati, risultati, errori, strumenti, ci siamo chiesti se potesse esistere una relazione tra i risultati ottenuti e gli strumenti e tecniche utilizzati.

Infatti abbiamo notato che i risultati migliori vengono ottenuti dalla scuola primaria dove si privilegia la manipolazione rispetto all'immaginazione, si usa la rappresentazione grafica per il 30% in 2 D e per il 15 % in 3D rispetto alle scuola secondaria di primo grado, dove non si ricorre più alla manipolazione e dove l'uso in 3D è limitatissimo, il 3% (la geometria solida si fa solo in terza media!!!!).

Verifica: ipotesi risultati- strumenti utilizzati

Per controllare se quest'ipotesi che collega i risultati ottenuti agli strumenti utilizzati poteva avere qualche fondamento abbiamo deciso di analizzare altri 3 problemi:

E. Scatola da ricoprire Cat. 3, 4, 5 I° prova 18 RMT

F. Sviluppo di un prisma Cat. 8, 9, 10 I° prova 18 RMT

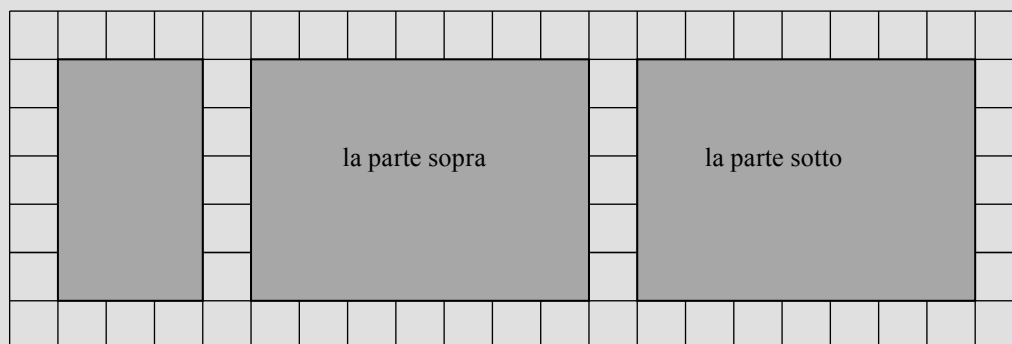
G. Il cubo Cat. 7, 8, 9, 10 II° prova 18 RMT

Analisi problema E

La scatola da ricoprire (Cat. 3, 4, 5)

Graziella vuole ricoprire interamente una scatola con dei rettangoli di carta.

Ha già disegnato questi tre rettangoli per coprire esattamente la parte sopra della scatola, la parte sotto della scatola e una delle altre facce della scatola.



Disegnate sulla quadrettatura in basso i tre rettangoli che mancano per ricoprire esattamente le altre facce della scatola.

I criteri dell'attribuzione dei punteggi, elaborati all'atto dell'analisi a priori erano i seguenti:

- 4 *Disegno corretto e preciso delle tre facce che mancano (una faccia 3×5 , due facce 7×3)*
- 3 *Disegno corretto delle tre facce che mancano, ma con delle linee imprecise (a mano libera, linee che non corrispondono esattamente a quelle della quadrettatura, ...)*
- 2 *Disegno corretto della quarta faccia (3×5) ed un errore nella 5ª e/o 6ª faccia (lati non corrispondenti ai dati)*
- 1 *Disegno corretto di una delle due facce o tre facce disegnate, ma con degli errori (che fanno però capire che gli alunni si sono resi conto che ci volevano sei facce in tutto)*
- 0 *Incomprensione del problema.*

Campione 554 protocolli

Valore medio: (Cat. 3) 2,3 \rightarrow 2,8 \rightarrow 3 (Cat. 5)

Successi: la media delle 3 categorie è del 60% rispetto al 30% del problema omologo "Scatoline"

Errori più comuni:

- disegnano un numero sbagliato di rettangoli o con le misure che non combaciano
- disegnano 3 facce uguali a quelle del testo

Strumenti e tecniche utilizzate:

- 90% solo disegno delle 3 facce
- 10% ritaglio e costruzione scatola

I successi ottenuti in questo problema sono raddoppiati rispetto a quelli ottenuti in "Scatoline" passando dal 30% al 60% nella media delle 3 categorie, ma gli errori più comuni segnalati qua sono diversi (qua non c'è lo scambio fra rettangolo e parallelepipedo) e anche gli strumenti usati sono completamente diversi (non si usa la manipolazione se non nel 10% dei casi in controtendenza con quello che di solito avviene nella scuola primaria); quindi analizzando bene queste situazioni pensiamo che i 2 problemi in oggetto siano proprio diversi; infatti in questo secondo problema per arrivare alla soluzione non occorre disegnare o costruire la scatola, ma basta disegnare le 3 facce mancanti, abbinandole a quelle che già avevamo, per cui la visualizzazione spaziale viene coinvolta solo in maniera marginale.

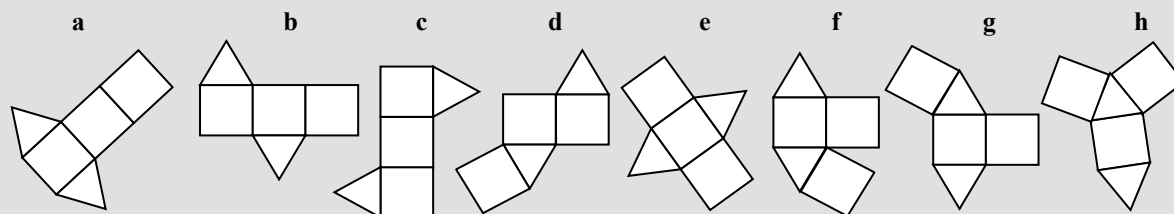
Analisi problema F

Sviluppi di un prisma Cat. (8, 9, 10)

Per il 17° RMT, gli allievi della classe di Antonio avevano dovuto cercare i diversi sviluppi di una piramide a base quadrata, ma non li avevano trovati tutti!

Oggi essi devono trovare tutti gli sviluppi di un prisma in cui le due basi sono triangoli equilateri e le altre tre facce sono quadrati.

Antonio ha trovato questi otto sviluppi:



I suoi compagni scoprono che ce ne sono solo sette corretti, perché c'è una figura sbagliata, e che ne mancano altri.

Qual è la figura sbagliata? Perché?

Disegnate almeno uno sviluppo che Antonio non ha trovato.

Campione: 274 protocolli di categoria 8

Valore medio: 2,77 rispetto a 0,97 dell'omologo "sviluppi di una piramide"

Successi: 60% contro il 21% dell'altro

Errori più comuni:

- unire facce non contigue per un punto
- non accorgersi delle figure simmetriche

Strumenti e tecniche usate:

- ritaglio, piegatura e costruzione in 3 D per il 45% contro il 15% dell'omologo
- uso della rappresentazione mentale 25% contro il 75%

I successi per questo problema sono triplicati rispetto a quelli ottenuti per "Sviluppi di una piramide", gli errori più comuni rimangono gli stessi mentre invece cambiano molto gli strumenti usati; infatti gli allievi qui usano in misura senz'altro maggiore attività manipolatorie come ritaglio, piegature e costruzione di solidi in 3 dimensioni (il 45% contro il 15% del problema omologo) e di conseguenza fanno meno ricorso alla rappresentazione mentale (25% contro il 75% del problema omologo).

Analoga situazione la riscontriamo nel problema proposto proprio dal nostro gruppo nella seconda prova del 18° RMT, "Il cubo" (Cat. 7, 8, 9, 10).

Analisi problema G

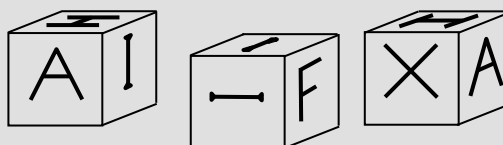
Il cubo (Cat. 7, 8, 9, 10)

Roberto ha costruito un cubo.

Ha scritto una lettera su ogni faccia.

Poi ha fotografato il suo cubo in diverse posizioni.

Ecco tre di queste fotografie:

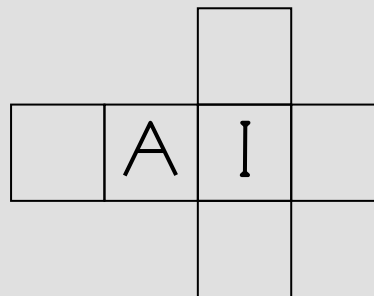


Carlo ha trovato molto interessante il cubo del suo amico

Roberto e ha deciso di costruirne uno esattamente uguale per sé.

Egli ha preparato un modello del suo cubo con le sei facce, che piegherà e incollerà con nastro adesivo trasparente.

Ha già disegnato le lettere A e I su due delle facce.



Disegnate le lettere delle altre quattro facce del cubo di Carlo, in modo che siano esattamente nelle stesse posizioni che sul cubo di Roberto.

Esistono più possibilità di porre le lettere su queste quattro facce?

Se sì, fate un disegno per ogni possibilità.

Campione: 266 classi di categoria 7 e 8 provenienti da Rozzano, Riva e Franche Comtè;

Valore medio: la media per le due categorie è del 2,3

Successi: uguali per le due categorie, il 50%

Errori più comuni:

- riguardano le simmetrie, ed in particolare l'orientamento delle lettere F ed I

Strumenti e tecniche usate:

- chi ha totalizzato punteggi alti (p. 4 o 3) ha usato ritaglio, sviluppo in cartoncino e costruzione in 3 D, per il 40% e la rappresentazione grafica in 2D per il 60%;

- mentre chi ha totalizzato punteggi bassi ha usato solo il disegno in 2D per il 90% e la manipolazione per il 10%.

Quindi come considerazione finale ci sembra di poter dire che esiste veramente una stretta relazione fra strumenti usati e risultati ottenuti; infatti i risultati migliori si possano ottenere quando si padroneggiano le rappresentazioni in 3 D e si usano attività manipolatorie costruendo solidi in concreto

Conclusioni

Alla luce di questi dati quali riflessioni si possono fare ?

Cosa fare per cercare di migliorare le situazioni descritte ?

Sicuramente è giunto il momento di ripensare a un diverso approccio e a un diverso percorso per poter costruire quest'abilità mentale nella scuola di base. In accordo con Vinicio Villani, là dove ancora parecchi anni fa invitava gli insegnanti a costruire i concetti geometrici attraverso esperienze spaziali da introdurre fin dai primi anni di scolarità per non trovarsi poi degli studenti con una scorretta visualizzazione spaziale, difficile da correggere, bisogna privilegiare un percorso, che sorretto da una metodologia appropriata ((ad es. in CREM, 1995, 1999): osservazione→ manipolazione→ costruzione→ rappresentazione grafica→ comunicazione) incominci fin dai primi anni della scuola primaria per poi continuare nella scuola secondaria di primo grado a sperimentare situazioni didattiche coinvolgenti e concrete, che investano i passaggi dalle 2 alle 3 D.

Quest'idea va proprio contro la tendenza dello studio tradizionale della geometria, che parte dalla definizione degli enti geometrici fondamentali e dalle classificazioni degli oggetti matematici ancora oggi proposta nei curricoli di matematica (vedi Fioroni 2007 piani di studio provinciali trentini 2009). Quindi gli ostacoli da rimuovere sono soprattutto quelli derivati dalla scelta del percorso di studio della geometria secondo un modello tradizionale. Questo percorso ha estremamente bisogno di una certa continuità di sperimentazioni di situazioni didattiche tra scuola primaria e secondaria, ciò che adesso non avviene e come obiettivo generale le attività di classificazione di oggetti matematici dovrebbero rappresentare un punto di arrivo e non come adesso un punto di partenza perché solo così i ragazzi scopriranno le proprietà caratteristiche degli oggetti e potranno costruirsi le immagini mentali prima e i concetti poi.

Bibliografia

CREM: 1995, *Les Mathématiques de la maternelle jusu'à 18 ans*, (*La matematica dalla scuola materna alla maturità*, edizione italiana a cura di Lucia Grugnetti e Vinicio Villani, 1999, Ed. Pitagora, Bologna, 6.1.1, La geometria a livello di base, pag. 136).

Fioroni: 2007, *Indicazioni nazionali per il curricolo del primo ciclo d'istruzione*, area matematico- scientifico-tecnologico, pag. 91-99.

M.Pellerey: 2009, *Piani di studio provinciali primo ciclo di istruzione*, linee guida per l'elaborazione dei piani di studio di Istituto, provincia autonoma di Trento, pag. 89-90.

Villani V.: 1987, 'Geometria dello spazio', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.10, n°5, pag. 405-440.