LA VISUALISATION SPATIALE ... OUBLIEE[39]

Roberto Battisti

section de Riva del Garda, pour le Groupe géométrie dans l'espace[40]:

But de la recherche

Par visualisation spatiale, nous faisons référence à la définition donnée par Vinicio Villani, *capacité mentale d'imaginer dans l'espace une figure sous une forme non statique*. Les données de cette recherche proviennent de l'école primaire et secondaire de premier degré italienne, auxquels se réfèrent aussi les résultats envisagés.
Dans un article du début des années 1990, Villani, faisait l'hypothèse que le processus de construction de la « visualisation spatiale » peut se développer de manière incorrecte s'il y a « conflit entre images mentales et concepts géométriques » et il soulignait comment ceci peut arriver quand la « vision mentale » se base sur un nombre limité d'expériences répétitives, proposées en référence à des modèles statiques, produisant une vision déformée de la réalité, qui conduit fréquemment à des stéréotypes qu'il sera difficile d'abandonner. Pour chercher à résoudre ou au moins à minimiser cette situation, il invitait les enseignants à renverser l'approche traditionnelle de la géométrie de l'espace (brèves séquences dédiées à l'observation d'objets de l'espace à trois dimensions et passage rapide aux éléments fondamentaux : points, droite, plan, angle; parcours qui outrepasse la capacité d'abstraction d'élèves de 11 ans immergés dans un monde à trois dimensions) et à travailler dès les premières années sur des expériences (par exemple, construire un maquette de l'école, du quartier[41]) qui favoriseront les passages réguliers entre le tridimensionnel et le bidimensionnel de manière à construire les « images mentales liées aux concepts géométriques ». De cette manière, il est plus simple de passer des solides ou volumes concrets aux figures géométriques, qui peuvent représenter plusieurs objets et s'ancrer mentalement comme abstractions de ces objets.
Il faut encore souligner la discrétion du thème de la géométrie dans l'espace dans nos curriculums :
- Ecole primaire (*Fioroni 2007*) Cl. II e III: principales figures du plan et de l'espace (OSA objectifs spécifiques de l'apprentissage : construire, dessiner et décrire des modèles matériels de quelques figures géométriques du plan et de l'espace)
- *PSP 2009, Plan d'études provincial du Trentin* **:** à la fin de l'école, explorer, décrire et représenter l'espace
- Ecole secondaire (*Fioroni*) Cl III: calcul de volumes, aires (OSA visualiser des objets tridimensionnels à partir d'une représentation bidimensionnelle et réciproquement ;
- *PSP:* faire appel à la visualisation, au raisonnement spatial et à la modélisation géométrique pour résoudre des problèmes, aussi dans des contextes concrets.
À une bonne vingtaine d'années de la publication de l'article cité, nous avons souhaité savoir si la situation décrite a évolué ou non. C'est ce qui a représenté pour notre groupe le point de départ et la motivation de nos recherches et nous nous sommes posé les questions suivantes :
- comment est traité actuellement la visualisation spatiale dans l'école obligatoire de l'école italienne?
- existe-t-il des différences significatives entre les deux ordres d'ordres d'enseignement (primaire et secondaire inférieur)?
- avec la croissance de l'âge des élèves, les compétences s'améliorent dans ce domaine de connaissances ; peut-on dire alors qu'ils sont en phase de construction de ce concept ?

Le groupe est parti de l'idée qu'en analysant avec soin les copies d'élèves, en mettant en évidence d'une part les erreurs les plus fréquentes et significatives, d'autre part les techniques et les instruments mobilisés, il est possible de répondre aux questions posées précédemment et de formuler quelques hypothèses sur les obstacles et les difficultés rencontrées par les élèves à propos de la visualisation spatiale.

---

[39] Texte tiré de la présentation du Groupe *Géometrie dans l'espace* lors de la rencontre de Besançon, 29-31 octobre 2010

[40] Roberto Battisti, Michela Mattei, Giuseppe Raffaelli, Ester Bonetti, Rita Orsola D'Agata, Irene Serpieri, Mari Cutrera, Carlo Marchini, Daniela Blanchet, Lucia Fazzino, Rosa Santori, Thierry Dias, Sebastien Dessertine

[41] On entre ainsi immédiatement en géométrie au travers des faces planes et des développements; les problèmes d'échelle sont résolus approximativement mais les dispositions et les formes sont respectées; les expériences visuelles sont acquises aux passages réciproques de l'espace au plane ; les élèves doivent parler de ce qu'ils font, confronter les formes qu'ils obtiennent, les dessiner, en décrire les propriétés, et c'st ainsi qu'ils construisent leurs « images mentales ».

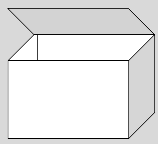
Choix des problèmes

Nous avons choisi, au départ, deux problèmes pour les catégories de l'école primaire et deux pour celles de l'école secondaire du premier degré, dans le même champ conceptuel : le passage de la deuxième à la troisième dimension, et réciproquement.
A. **Boîtes** Cat. 3, 4, 5, 17 RMT I
B. Tours bicolores Cat. 3, 4, 5, 16 RMT I
C. Développements d'une pyramide Cat. 6, 7, 8, 17 RMT I
D. La boîte de cubes Cat. 6, 7, 16 RMT II
Puis, au cours des travaux, nous avons encore choisi trois autres problèmes pour élargir le champ des données utiles à notre recherche
E. Boîtes à recouvrir Cat. 3, 4, 5, 18 RMT I
F. Développement d'un prisme Cat. 8, 9, 10, 18 RMT I
G. Le cube Cat. 7, 8, 9, 10. 18 RMT II

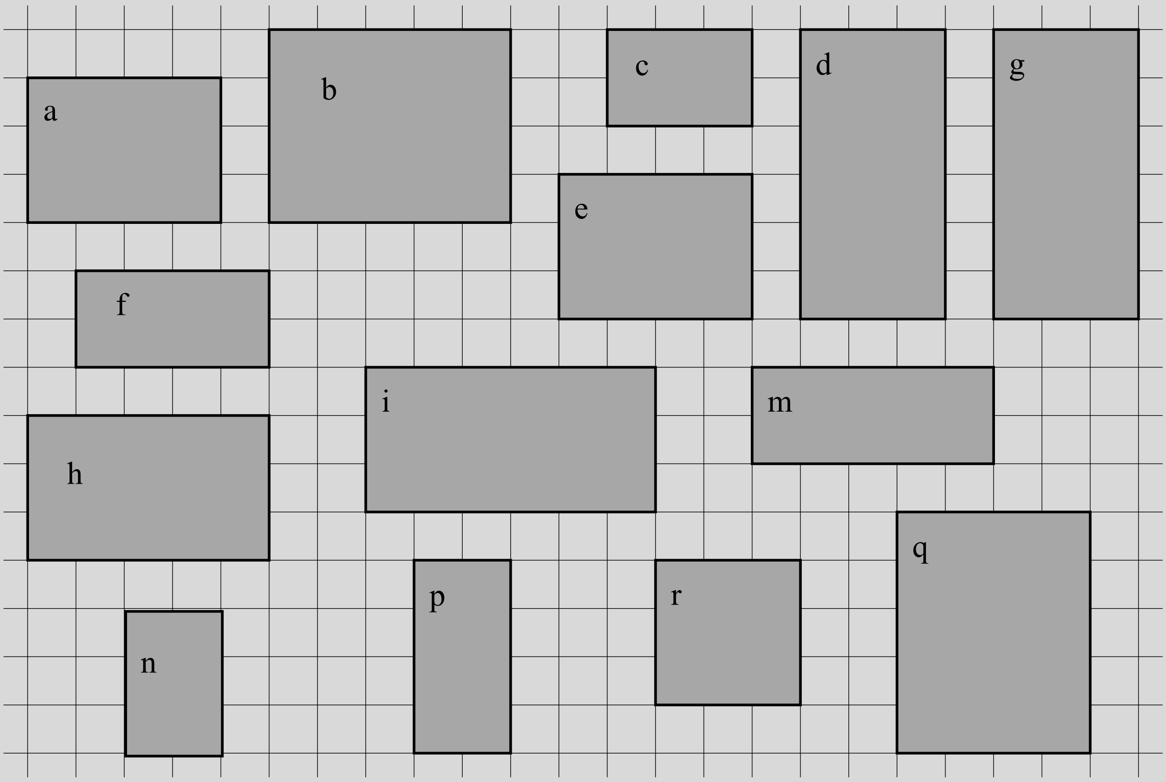
Analyse du problème A

Boîtes (Cat. 3, 4, 5)

Franco assemble des cartes avec du papier collant pour obtenir des boîtes de ce genre :



Chaque carte est une face de la boîte. Franco les utilise comme elles sont, sans les découper et sans les plier. Il a déjà construit plusieurs boîtes, mais il lui reste encore les cartes que vous voyez ci-dessous :



Combien de boîtes pourra-t-il encore construire avec les cartes qui restent ?
Dites quelles sont les cartes qui lui serviront.

Les critères d'attribution des points, élaborés lors de l'analyse a priori du problème, étaient les suivants :

4 *La boîte correctement reconstruite ou désignée (a, c, e, f, n, p), avec l'affirmation qu'il n'est pas possible de former une autre boîte et une explication complète qui se réfère aux longueurs des s et à l'égalité des rectangles*

3 La boîte correctement reconstruite ou désignée et l'affirmation de l'unicité, avec explication incomplète ou peu claire
ou la boîte correctement reconstruite ou désignée avec explications mais sans allusion à l'unicité
2 La boîte correctement reconstruite ou désignée, sans aucune explication
1 Début de raisonnement dans lequel les rectangles égaux sont regroupés par deux, mais ne peuvent pas s'alterner correctement
0 Incompréhension du problème

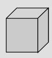
L'échantillon comprend 600 copies, environ 200 pour chaque catégorie, provenant des sections de Aosta, Milano, Parma, Siena, Rozzano et Riva del Garda;
La moyenne (sur 4 points) va de 0,79 (Cat.3) à 1,02 (Cat.4) puis à 1,47 (Cat.5)
Réponse justes: (4 et 3 points) la moyenne des 3 catégories est del 30%
Erreurs les plus fréquentes:
- les élèves confondent parallélogramme et rectangle
- ils ne connaissent pas le nombre de faces du parallélépipède rectangle (7, 8, 9)
- la boîte est sans couvercle ou sans fond et n'a donc que 5 faces
- dans la construction, non prise en compte du fait que les cartes doivent être égales deux par deux et que leurs s doivent coïncider
- non réponse: 15%

Instruments et techniques utilisés :
- 30 % des groupes représentent la boîte par un développement plan (correct dans 80% des cas),
- 15% présentent la boîte par un dessin en trois dimensions,
- 40% répondent sur la base d'une représentation mentale seulement
- les trois catégories utilisent les mêmes instruments, avec la même fréquence.

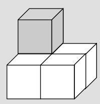
Analyse du problème B

Tours bicolores (Cat. 3, 4, 5)
Robin possède une boîte qui contient des cubes gris et des cubes blancs.
Il construit plusieurs tours en respectant le modèle suivant :

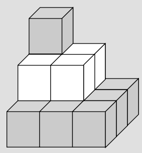
Première tour : 1 cube gris



Deuxième tour :
5 cubes : 1 gris et 4 blancs



Troisième tour :
14 cubes : 10 gris et 4 blancs

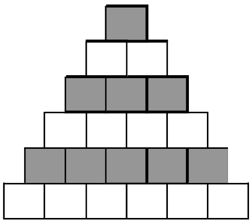


Robin continue à construire des tours en changeant de couleur pour chaque étage.
En continuant de la même manière, combien de cubes de chaque couleur Robin utilisera-t-il pour construire la sixième tour ?
Expliquez votre réponse.

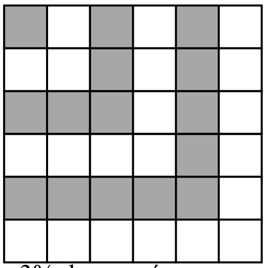
Les critères d'attribution des points, élaborés lors de l'analyse a priori du problème, étaient les suivants :
4 Solution correcte (35 gris et 56 blancs) avec explications
3 Solution correcte (35 gris et 56 blancs) sans explications ou avec explications insuffisantes
2 Démarche correcte mais avec réponse fausse due à une seule erreur dans le dénombrement ou le calcul
ou démarche correcte avec, comme réponse, le nombre total de cubes (91) sans distinguer les couleurs
1 Comptage de cubes visibles uniquement (15 gris et 21 blancs)
0 Incompréhension du problème

Échantillon: 500 copies environ réparties quasi également fra le 3 catégorie;
Moyenne des points : 0,51 (Cat.3) 1,06 (Cat.4) 1,91 (Cat.5)
Réponses correctes : (points 4 e 3) 30% comme moyenne des 3 catégories
Erreurs les plus fréquentes :
- calculent 20 cubes (12g + 8b) additionnant seulement ceux des trois premières tours de l'énoncé

- dessinent les tours comme un empilement de carrés dans un plan vertical et trouvent 21 au total (9g + 12b)



- calculent 36 cubes (15g +21b) qui correspondent au nombre de cubes de la même tour vue en plan ou dessinent la tour en 3 dimensions mais comptent seulement les cubes qu'ils voient



- 3% de non réponse

Instruments et techniques utilisés

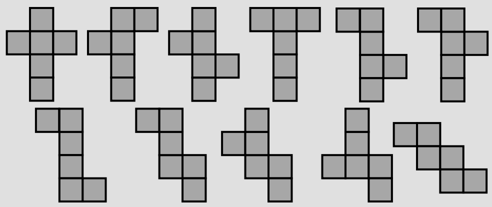
- 20% utilisent le développement sur un plan (dont seulement le 40% est correct)
- 14% utilisent un dessin en 3 dimensions, correct
- 18% solutions arithmétiques
- 45% ne décrivent pas la stratégie utilisée et ne donnent que la réponse

Analyse du problème C

Développements de pyramides (Cat. 6, 7, 8)

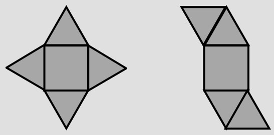
Le mois passé, les élèves de la classe d'Antoine ont cherché tous les développements du cube. Ils en ont trouvé 11, tous différents (qu'on ne peut pas superposer exactement en les déplaçant ou les retournant) et ont vérifié qu'il n'y en a pas d'autres. (voir figure ci-contre)

Les 11 développements du cube:



Aujourd'hui, Antoine et ses camarades doivent trouver tous les développements d'une pyramide régulière de base carrée dont les quatre faces latérales sont des triangles équilatéraux et dont toutes les arêtes mesurent 2 cm.
Ils en ont déjà trouvé deux, mais ils pensent qu'il y en a encore d'autres :

Les 2 développements de la pyramide déjà trouvés:



Combien existe-t-il, en tout, de développements différents de cette pyramide ?
Dessinez-les tous, avec tous les s de 2 cm.

Les critères d'attribution des points, élaborés lors de l'analyse a priori du problème, étaient les suivants :

4 *Réponse correcte (8 développements différents avec les 8 dessins), on n'exige pas une grande précision, mais la distinction claire du carré, des quatre triangles équilatéraux et de leurs positions respectives*

3 *Réponse correcte (8 développements différents) avec dessin des six développements qui ne sont pas donnés dans les exemples (sans doublures)*
ou réponse avec 7 ou 9 développements différents (due à un oubli ou une « doublure ») avec les dessins correspondants clairs (avec ou sans les exemples)

2 *Réponse avec 5 ou 6 ou 10 ou 11 développements différents avec les dessins correspondants clairs, due à deux oublis ou deux « doublures »*
ou 8 développements différents mais avec dessins très imprécis ou faces non-contiguës
1 *De un à quatre développements trouvés, différents des exemples*
0 *Incompréhension du problème*

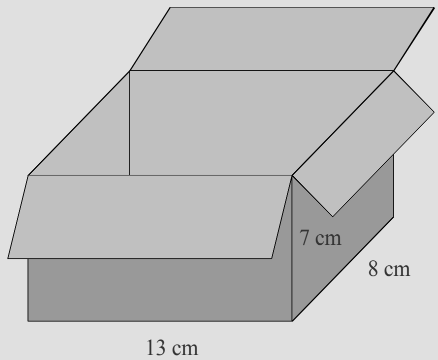
Échantillon: environ 650 copies réparties également entre les 3 catégories;
Moyenne des points : 0,77 (Cat.6) ; 0,83 (Cat.7) ; 0,97 (Cat.8)
Réponses correctes : (points 4 et 3) moyenne des 3 catégories 13%
Erreurs les plus fréquentes :
- joignent des faces non contiguës, mais qui coïncident par un point
- utilisent des faces qui se superposent par rotation ou translation
- utilisent des triangles isocèles ou rectangles au lieu de triangles équilatéraux
- 10% de non réponse (donnée commune aux 3 catégories)

Instruments et techniques utilisés
- 75% travaillent uniquement par dessin
- 15% découpent les pièces, les joignent et forment la pyramide, puis la dessinent

Analyse du problème D

La boîte de cubes (cat. 6, 7)
François a une boîte en forme de parallélépipède rectangle de dimensions intérieures13 cm, 8 cm et 7 cm.

Il dispose de nombreux cubes en bois,
les uns de 2 cm d'arête, les autres de 1cm d'arête.
François veut remplir complètement la boîte avec le moins possible de cubes.
Combien doit-il en mettre de chaque sorte ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



Les critères d'attribution des points, élaborés lors de l'analyse a priori du problème, étaient les suivants :
4 *Réponse correcte (72 cubes de 2 cm d'arête; 152 cubes de 1 cm d'arête) avec explications claires*
3 *Réponse correcte avec explications peu claires ;*
ou démarche correcte avec explications claires mais avec des erreurs de calcul (la réponse 160 pour le nombre de cubes de 1 cm d'arête est à considérer comme erreur de raisonnement et non comme simple erreur de calcul)
2 *Réponse correcte pour le nombre d'un seul type de cubes avec explications claires et réponse erronée pour l'autre*
1 *Seulement un des deux nombres sans explications*
0 *Incompréhension du problème ou réponse « 91 + 0 »*
Échantillon: 250 copies provenant de Parma et Riva del Garda
Moyenne des points : 0,5 (Cat.6) ; 0,8 (Cat.7)
Réponses correctes : (points 4 et 3) 11% en moyenne pour les 2 catégories
Erreurs les plus fréquentes
- calcul de 128 cubes de 1 cm^3 (104 au dernier étage + 24 des trois couches inférieures au lieu de 16 × 3 = 48, confusion entre aire et volume)
- solutions arithmétiques ; 91 (728 : 8 = 91), trouvé en divisant le volume total de la boîte par le volume d'un cube di côté 2 cm, sans se rendre compte que deux mesures de la boîte sont représentées par un nombre impair
- confusion entre cubes et carrés, aire et volume
- le volume de 728 cubes de côté 1 cm est considéré comme équivalent à celui di 364 cubes de 2 cm de côté
- le volume d'un cube de côté 1 est considéré comme le 1/4 du volume d'un cube de côté 2, comparaison de deux carrés dans le plan, confusion entre deux et trois dimensions
- 10% non-réponses

Instruments et techniques utilisés
- 32%, dessin plan vu du haut
- 3%, dessin en trois dimensions, dessinant les cubes internes couche par couche
- 45%, solution arithmétiques sans dessin

Notre groupe a trouvé ce problème particulièrement intéressant au vu des résultats obtenus et nous avons pensé à l'utiliser aussi dans d'autres contextes. En fait, nous l'avons proposé individuellement et aussi en catégorie 8, en modifiant ainsi les paramètres didactiques. Voici les résultats :
Échantillon : 258 copies de catégories 6, 7, et aussi de catégorie 8 avec des effectifs comparables à ceux des deux premières
Moyenne des points : 0,5 (Cat.6) ; 0,8 (Cat.7) ; 0,8 (Cat.8)
Réponses correctes : (3 et 4 points) 10% en moyenne pour les trois catégories
Erreurs les plus fréquentes
- 55%, confusion entre deux et trois dimensions, aire et volume
- 10%, calcul d'un seul type de cube
- 15%, erreur de calcul
- 24%, non-réponse

Instruments et techniques utilisés
- 50%, solution arithmétique sans dessin
- 45%, solution arithmétique avec un dessin dans le plan
- seulement le 5% de dessins en trois dimensions

La comparaison montre que les résultats obtenus dans les deux expérimentations (par groupes ou individuellement) sont très proches, voire les mêmes, y compris pour la catégorie 8, nouvelle, soit pour la typologie des erreurs observées, soit pour les instruments et techniques utilisés. La seule différence, très significative, concerne le nombre d'abandons, beaucoup plus fréquents chez les élèves qui ont travaillé individuellement, près de 24%, alors que seulement 10% des groupes n'avaient pas répondu lors de l'épreuve dans le cadre du Rallye.

Synthèse des résultats

Titre	Nb. copies	Cat.3	Cat.4	Cat.5	Moyenne
Boîtes	568	0,79	1,02	1,47	1,09
Tours bicolores	495	0,51	1,06	1,95	1,16
		Cat.6	Cat.7	Cat.8	Moyenne
Dév. de pyramide	648	0,77	0,83	0,97	0,86
Boîte de cubes	250 + 258	0,5	0,79	(0,8)	0,64

En observant les moyennes des points obtenus dans ce tableau pour les quatre problèmes on remarque une sensible amélioration, aux niveaux de l'école primaire ; en passant de la catégorie 3 à la catégorie 5, les valeurs doublent, voire triplent. Ceci laisse penser que en augmentant le nombre d'expériences vécues, les capacités requises s'améliorent aussi.
La progression ne se répète pas aux degrés de l'école secondaire où l'on ne relève pas de progrès sensible en passant de la catégorie 6 à la catégorie 8. En outre, les moyennes des points obtenus dans ces degrés sont toujours inférieures, et sensiblement, de 30% à 40%, par rapport à celles obtenues à l'école primaire.
C'est une première réponse à nos hypothèses initiales sur le parcours scolaire, sur la construction de ce concept et sur les différences entre les deux ordres d'enseignement.

Synthèse des analyses d'erreurs

De l'analyse des erreurs les plus fréquentes, apparaît l'existence d'un conflit significatif entre images mentales et concepts géométriques là où est exigé un changement de registre du plan à l'espace (passage entre la 2^e et la 3^e dimension). On l'observe surtout dans le langage utilisé tant à l'école primaire que secondaire :
- Boîtes : échange ou confusion des termes rectangle et parallélépipède
- Tours bicolores : échange ou confusion des termes carré et cube, aire et volume
- Boîte de cubes: échange ou confusion des termes carré et cube, aire et volume

Très souvent, la capacité de voir dans l'espace ou de visualiser des figures à trois dimensions fait entièrement défaut :
- Boîtes, méconnaissance des caractéristiques du parallélépipède (on parle de 7, 8, 9 faces)
- Tours bicolores, les cubes cachés sont ignorés
- Développements de pyramides : les symétries ne sont pas reconnues (on parle de 30 à 40 développements), les faces qui se superposent par rotation ou translation ne sont pas reconnues

Voici une autre réponse à nos hypothèses initiales sur l'existence de la construction de cette capacité lors du parcours scolaire (il ne le semble vraiment pas !!!!).

Les observations mises en évidence: les instruments

Des analyses des instruments maîtrisés et utilisés pour mettre en acte les stratégies die résolution, on relève que :

- à l'école primaire, le 30% des élèves font une représentation graphique dans le plan et seulement le 15% font un dessin à trois dimensions, et que la manipulation est privilégiée.
- à l'école secondaire, le dessin est préféré à la construction ou à la manipulation des objets géométriques (Pyramide, 75% font seulement le dessin, 15% découpent) ; le dessin dans le plan se trouve dans 15% des cas contre 3% de dessin en 3D, et en outre, on tend à privilégier les solutions de type arithmétique, si possible (comme si l'on faisait plus confiance à celles-ci).

A la lumière de ces données, résultats, erreurs, instruments, nous nous sommes demandés s'il pouvait exister une relation entre les résultats obtenus et les instruments et techniques utilisées ?

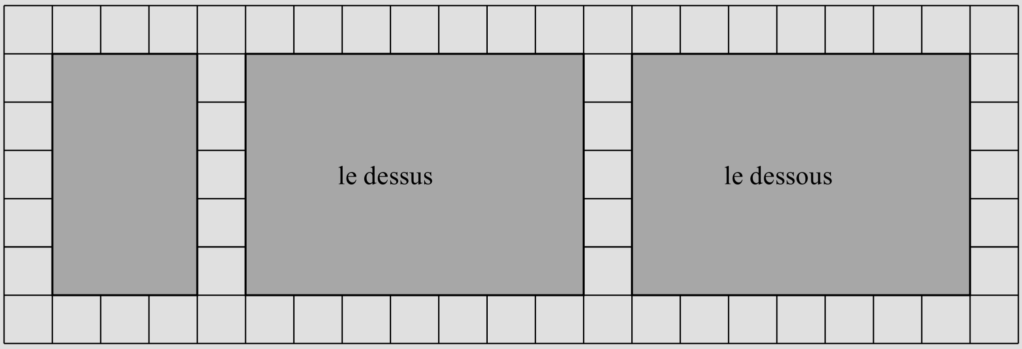
En effet, nous avons noté que les résultats les meilleurs sont ceux de l'école primaire où les élèves privilégient la manipulation plutôt que l'imagination, où ils font appel aux représentations graphiques, dans le 30% des cas à deux dimensions et dans le 15 % en trois dimensions. A l'école secondaire de niveau I, on ne relève plus de recours à la manipulation et les représentations à trois dimensions sont extrêmement limitées : 3D, dans le 3% des cas (la géométrie dans l'espace ne se fait qu'en troisième année !!!).

Vérification des hypothèses sur les liens entre résultats et instruments utilisés

Pour co ntrôler si cette hypothèse qui relie les résultats obtenus aux instruments utilisés est fondée, nous avons décidé d'analyser trois autres problèmes :
E. Boîtes à recouvrir Cat. 3, 4, 5, 18 RMT I
F. Développement d'un prisme Cat. 8, 9, 10, 18 RMT I
G. Le cube Cat. 7, 8, 9, 10. 18 RMT II

Analyse du problème E

La boîte à recouvrir (Cat 3, 4, 5)
Graziella veut couvrir entièrement une boîte avec des rectangles de papier.
Elle a déjà dessiné ces trois rectangles pour couvrir exactement le dessous de la boîte, le dessus de la boîte et une des autres faces de la boîte.



Dessinez sur le quadrillage ci-dessous les trois rectangles qui manquent pour couvrir exactement les autres faces de la boîte.

Attribution des points
4 Dessin correct et précis des trois faces qui manquent (une face 3 x 5, deux faces 7 x 3)
3 Dessin correct des trois faces qui manquent, mais avec des tracés imprécis (à main levée, lignes qui ne correspondent pas exactement à celles du quadrillage,)
2 Dessin correct de la quatrième face (3 x 5) et une erreur dans les 5[e] et/ou 6[e] faces (s non correspondant aux données)
1 Dessin correct d'une ou deux faces
ou trois faces dessinées mais avec erreurs (faisant seulement comprendre que les élèves se sont rendu compte qu'il fallait 6 faces en tout)
0 Incompréhension du problème

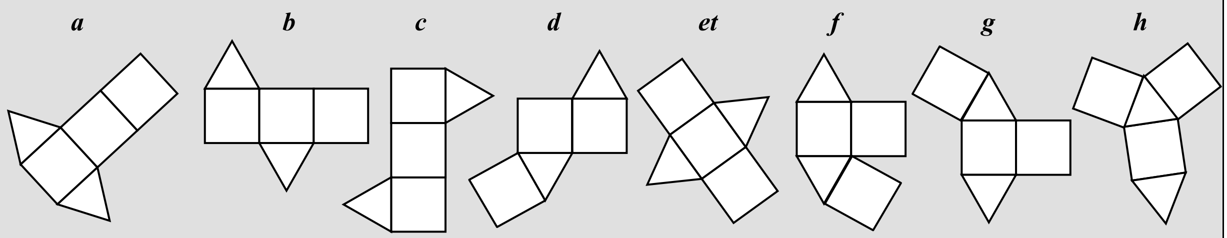
Échantillon 554 copies
Moyenne des points :(Cat.3) 2,3 → 2,8 → 3 (Cat.5)
Réponses correctes : la moyenne des points pour la catégorie 3 est de 60% par rapport aux 30% du problème isomorphe « Boîtes »
Erreurs les plus fréquentes
- dessinent un nombre erroné de rectangles ou avec des mesures de côtés qui ne correspondent pas
- dessinent trois faces égales à celles des figures de l'énoncé

Instruments et techniques utilisés:
- 90% dessin des trois faces seulement
- 10% découpage et construction de la boîte

Les réponses correctes obtenues à ce problème sont le double de celles obtenues pour le problème « Boîtes », passant de 30% à 60% pour la moyenne des trois catégories, mais les erreurs les plus communes relevées ici sont différentes (il n'y a plus de confusion entre rectangle et parallélépipède). Les instruments utilisés sont aussi très différentes (on ne rencontre la manipulation que dans le 10% des cas, contrairement avec ce qui est arrive souvent à l'école primaire) ; par conséquent, en analysant plus profondément ces deux situations, nous pensons que les deux problèmes en comparaison sont très différents. En fait, dans « La boîte à recouvrir », il n'est pas nécessaire de dessiner ou construire la boîte mais il suffit de désigner les trois faces qui manquent, en les joignant à celles qui sont déjà préparées, opération dans laquelle la visualisation spatiale intervient de façon marginale.

Analyse du problème F

Développements d'un prisme (Cat. 8, 9, 10)
Pour le 17e RMT, les élèves de la classe d'Antoine avaient dû chercher les différents développements d'une pyramide à base carrée, mais ils ne les avaient pas tous trouvés !
Aujourd'hui, ils doivent trouver tous les développements d'un prisme dont les deux bases sont des triangles équilatéraux et les trois autres faces sont des carrés.
Antoine a trouvé ces huit développements :



Ses camarades découvrent qu'il n'en a que sept valables, car il y a une figure qui ne convient pas, et qu'il manque encore d'autres figures.
Quelle est la figure fausse ? Pourquoi ?
Dessinez au moins un développement qu'Antoine n'a pas trouvé.

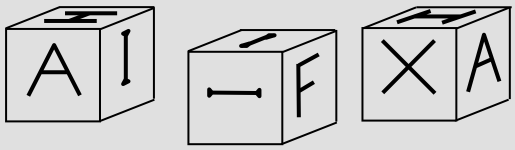
Échantillon: 274 copies di catégorie 8
Moyenne des points : 2,77 par rapport au 0,97 du problème isomorphe « Développement d'une pyramide »
Réponses correctes : 60% contre le 21% de l'autre
Erreurs les plus fréquentes
- unir des faces non contiguës par un point
- ne pas s rendre compte des figures symétriques

Instruments et techniques utilisés:
- découpage, pliages et construction en 3 D pour le 45% contre le 15% du problème isomorphe
- appel à des représentations mentales 25% contre le 75%

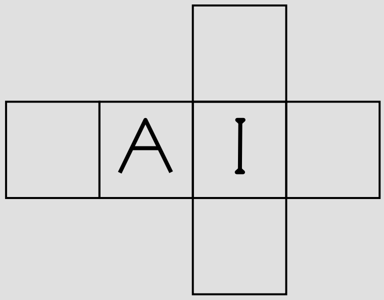
Les réponses correctes à ce problème ont triplé par rapport à celles obtenues pour « Développement d'une pyramide », les erreurs les plus fréquentes sont les mêmes alors que les instruments mis en œuvre changent de manière sensible : les élèves utilisent en effet majoritairement des manipulations comme le découpage, le pliage et la construction du solide en trois dimensions (le 45% contre le 15% du problème isomorphe de la « Pyramide ») et par conséquent recourent moins aux représentations mentales (25% contre le 75%).
On retrouve les mêmes observations dans la situation du problème proposé justement par notre groupe pour la deuxième épreuve du 18e RMT, « Le cube » (Cat. 7, 8, 9, 10).

Analyse du problème G

Le cube (Cat. 7, 8, 9, 10)
Roberto a construit un cube.
Il a écrit une lettre sur chaque face.
Il a ensuite photographié son cube dans plusieurs positions.
Voici trois de ces photos :



Carlo trouve que le cube de son ami Roberto est très intéressant et décide de construire, pour lui-même, un cube parfaitement identique.
Il a préparé un patron de son cube, avec les six faces qu'il va plier et coller avec du papier adhésif transparent.
Il a déjà dessiné le A et un I sur deux des faces.



Dessinez les lettres des quatre autres faces du cube de Carlo pour qu'elles se retrouvent dans les mêmes positions que sur le cube de Roberto.
Y a-t-il plusieurs possibilités de placer les lettres sur ces quatre faces ?
Si oui, faites un dessin pour chaque possibilité.

Echantillon: 266 classes de catégories 7 et 8, de Rozzano, Riva et Franche Comté ;
Moyenne des points : la moyenne des deux catégories est 2,3
Réponses correctes : la même proportion pour le deux catégories : 50%
Erreurs les plus fréquentes :
- concernent les symétries et en particulier l'orientation des lettres F et I

Instruments et techniques utilisés:
- les classes qui ont obtenus de bons résultats (4 ou 3 points) ont découpé des développements et effectué les constructions en 3 D, pour 40% d'entre elles ou des représentations graphiques planes 2D pour le 60% des autres,
- alors que le 90% de celles qui ont obtenus de moins bons résultats ont fait des dessins en plan et seulement le 10% ont eu recours aux manipulations.

On peut donc dire, comme en considérations finales qu'il existe vraiment une relation étroite entre les instruments utilisés et les résultats obtenus. En effet, les meilleures réussites s'obtiennent par une maîtrise de la représentation en 3D et le recours aux manipulations par une construction concrète des solides.

Conclusions

Quelles réflexions pouvons-nous faire à la lumière de ces données ?
Que faire pour améliorer les situations décrites ici ?
Le moment est certainement venu de repenser à une approche différente et à de nouveaux parcours pour pouvoir construire cette capacité mentale dans l'enseignement de base. En accord avec Vinicio Villani qui, depuis de nombreuses années, invitait les enseignants à construire les concepts géométriques en références à des expérimentations proposées dès les premières années de la scolarité pour éviter les obstacles à une visualisation spatiale inadéquate, nous réaffirmons qu'il faut privilégier un parcours, en référence à une méthodologie appropriée (ex. in CREM, 1995, 1999) : observation→ manipulation→ construction→ représentation graphique → communication). Commencer dès les premières années d'école primaire et continuer à l'école secondaire de degré I à expérimenter des situations didactiques concrètes et dans lesquelles les élèves peuvent s'engager pour permettre les passages de la deuxième à la troisième dimension.
Cette idée va contre le courant de l'étude traditionnelle de la géométrie, qui part de la définition des éléments constituants de la géométrie et de la classification des objets mathématiques, qui est encore proposée aujourd'hui dans les curriculum de mathématiques (voir Fioroni 2007 plan d'études de la Province du Trentino, 2009).
Par conséquent les obstacles à écarter sont surtout ceux qui dérivent des choix du parcours d'études de la géométrie selon le modèle traditionnel. Ce parcours a besoin de continuité entre les situations didactiques entre les l'école primaire et l'école secondaire et d'une inversion des priorités. Les activités de classification des objets mathématiques devraient être situés en point d'arrivée et non comme, actuellement, un point de départ. Les

élèves doivent déjà découvrir les propriétés caractéristiques des objets pour s'en construire des images mentales avant d'arriver aux concepts.

Bibliographie

CREM: 1995, *Les Mathématiques de la maternelle jusu'à 18 ans*, (*La matematica dalla scuola materna alla maturità*, edizione italiana a cura di Lucia Grugnetti e Vinicio Villani, 1999, Ed. Pitagora, Bologna, 6.1.1, La geometria a livello di base, pag. 136).
Fioroni: 2007, Indicazioni nazionali per il curricolo del primo ciclo d'istruzione, area matematico- scientifico-tecnologico, pag. 91-99.
M.Pellerey: 2009, Piani di studio provinciali primo ciclo di istruzione, linee guida per l'elaborazione dei piani di studio di Istituto, provincia autonoma di Trento, pag. 89-90.
Villani V.: 1987, 'Geometria dello spazio', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.10, n°5, pag. 405-440.